

液体火箭发动机基于非线性理论的 稳定性分析方法

杨晶晶, 刘卫东

(国防科学技术大学 航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 以液氧/煤油单台空间发动机的起动过程和平稳工况为研究对象, 在改变推力室喷管喉部直径的情况下, 运用非线性领域中的分析方法, 对系统在整个相空间的表现行为作了全局分析比较。综合考虑相空间吸引子、李雅普诺夫指数以及分维数, 提出了一种新的研究系统稳定性分析方法——轨道稳定性分析法。该方法具有几何学直观的优点, 易于在计算机上实现。

关键词: 液体火箭发动机; 非线性; 稳定性; 李雅普诺夫指数; 关联维

中图分类号: V434

文献标识码: A

文章编号: (2007) 01-0012-07

The stability analysis technique based on nonlinear theory for liquid propellant rocket engine

Yang Jingjing, Liu Weidong

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Start-up procedure and stationary behaviour of a liquid oxygen/kerosene space engine was chosen as the research object in this paper. When the throat diameters of the nozzle was changed, the movements of the whole phase-space were analyzed and compared globally by using the methods of nonlinear field. A new method for studying the stability of the system was presented in this paper. Analysis method of stability of orbit, the attractors in phase-space, Lyapunov exponents and correlation dimension were considered synthetically. This method is not only visual in geometrics but also easy to realize with computers.

Key words: liquid propellant rocket engine; nonlinear; stability; Lyapunov exponents; correlation dimension

收稿日期: 2006-02-21; 修回日期: 2006-05-15。

作者简介: 杨晶晶 (1982—), 女, 硕士生, 研究领域为液体火箭发动机系统动力学。

1 引言

液体火箭发动机动力学系统稳定性问题一直是理论和工程上的难点。主要在于发动机结构和工作参数的复杂性,使其数学模型通常具有高维和非线性的特点。目前对于发动机动力学系统稳定性的研究,国内外都采用简化数学模型和传统的线性化方法。在方法上一直没有新的突破。本文基于非线性动力学理论,针对某挤压式液体火箭发动机模型的起动过程,提出了一种新的稳定性分析方法——轨道稳定性分析,即从相空间的角度探讨动力系统稳定性问题,这一学科交叉领域目前国内外还没有人涉足过。

2 分析方法原理

动力学方程的解 $x(t)$ 反映系统的运动性质,解的稳定性与否即表示系统运动的稳定与否。形象地说,如果 $x(t)$ 邻近的轨道最终都趋于它,则 $x(t)$ 便是渐进稳定的。如果 $x(t)$ 邻近的轨道最终都要远离它,则轨道 $x(t)$ 是不稳定的, $x(t)$ 还有可能介于这两者之间,如出现极限环等等。这种情况下系统作周期振荡,整体稳定 (但不是渐进稳定)。轨道稳定性就是在相空间中看方程的解或运动状态的稳定性。

随着计算机技术的高度发展,我们很容易求出微分动力系统的数值解,再运用相空间重构理论,通过分析相图,得出由某一时间序列反映出的整个动力学系统的动态特性。轨道稳定性分析法充分考虑非线性因素的影响,与传统的平衡点附近线性化的方法比较起来,线性化只能是所谓的局域 (或局部) 分析。如果系统长时间 ($t \rightarrow \infty$) 内局限于相空间的有限区域,则称系统具有全局稳定性。因此由局域分析得知某平衡点不稳定并不一定意味全局也不稳定。对于系统全局稳定性分析的理论方法需要构建李雅普诺夫函数,这对于复杂的液体火箭发动机动力系统来说太有挑战性。

3 空间发动机起动过程数值仿真

3.1 基本假设

液氧/煤油空间发动机系统起动时首先打开氧化剂和燃料主阀,使它们充填完主管道之后,再打开液氧分阀,使其先进入推力室。经过某一时刻以后再打开燃料分阀,挤压进入推力室。建立数学模型时我们假设起始时刻氧化剂和燃料主阀已经打开,氧化剂和燃料已经充填完主管道。整个系统作如下的假设:

(1) 推进剂管道中流动为一维流,且已达到紊流状态;

(2) 燃烧室中压强分布均匀,燃气符合理想气体状态方程;

(3) 阀门为瞬时线性元件阀门,流通面积随时间线性规律变化;

(4) 空间发动机系统在空间中工作,可以不考虑系统动态传热。

3.2 发动机模块

由于本文着重理论方法性研究,为了建模和计算简便,将发动机系统划分为六个仿真模块:储箱模块,管路模块,充填模块,燃烧室模块,喷管模块,电磁阀模块。并且我们认为储箱恒压,电磁阀是线性理想元件,并将其作为管路部分的局部流阻处理。

3.3 发动机数学模型

3.3.1 管路模块微分方程 (考虑惯性和粘性的动态方程)

$$R_o \frac{dq_{mo}}{dt} = p_{oT} - p_{oI} - (\xi_{Mvo} + \xi_{lo}) \frac{q_{mo} |q_{mo}|}{\rho_o} + h_o \rho_o g \quad (1)$$

$$R_f \frac{dq_{mf}}{dt} = p_{fT} - p_{fI} - (\xi_{Mvf} + \xi_{lf}) \frac{q_{mf} |q_{mf}|}{\rho_f} + h_f \rho_f g \quad (2)$$

式中, q_{mo} 、 q_{mf} 分别为发动机氧化剂流量和发动机燃料流量; p_{oT} 、 p_{fT} 分别是液氧和燃料的恒压储箱压力; p_{oI} 、 p_{fI} 分别是液氧和燃料管路的出口压力; ξ_{Mvo} 为液氧管路电磁阀的局部流阻; ξ_{lo} 为液氧管路沿程流阻; ξ_{Mvf} 为燃料管路电磁阀的局部流阻; ξ_{lf} 为燃料管路沿程流阻; R_o 、 R_f 分别为

氧、燃料管路惯性流阻； ρ 为推进剂密度； h 为管路高度； g 为重力加速度。

考虑压缩性的动态方程为

$$\frac{V_o \rho_o}{K} \cdot \frac{dp_{o1}}{dt} = q_{moT} - q_{mo} \quad (3)$$

$$\frac{V_f \rho_f}{K} \cdot \frac{dp_{f1}}{dt} = q_{mfT} - q_{mf} \quad (4)$$

式中， K 为液体的体积弹性模量； V_o 、 V_f 为氧、燃料管路容积； q_{moT} 和 q_{mo} 分别为液氧流经管路前后的流量； q_{mfT} 和 q_{mf} 分别为燃料流经管路前后的流量。

模块输入变量为 n 个子管路入口流量；输出变量为 $t+\Delta t$ 时刻管路总流量和出口压降。其中初始化为管路流阻系数、管路惯性流阻系数、管长、入口与出口压降及推进剂密度。

3.3.2 推进剂充填模块微分方程

$$\frac{l_o}{F_o} \cdot \frac{dq_{mo}}{dt} = p_o - p_c - (\xi_{vo} + \xi_{lo} + \xi_{eo}) \frac{q_{mo} |q_{mo}|}{\rho_o} + h_{lo} \rho_{og} \quad (5)$$

$$\frac{l_f}{F_f} \cdot \frac{dq_{mf}}{dt} = p_f - p_c - (\xi_{vf} + \xi_{lf} + \xi_{ef}) \frac{q_{mf} |q_{mf}|}{\rho_f} + h_{lf} \rho_{fg} \quad (6)$$

$$\frac{dl_o}{dt} = \frac{q_{mo}}{\rho_o F_o} \quad (7)$$

$$\frac{dl_f}{dt} = \frac{q_{mf}}{\rho_f F_f} \quad (8)$$

式中， l 为充填管路长度； F 为充填管路面积； ξ_v 为分阀局部流阻； ξ_e 为喷注器局部流阻； p_c 为燃烧室压力； p_o 、 p_f 分别为液氧、燃料入口压力。

模块输入变量为 t 时刻充填管路入口压降和燃烧室压降；输出变量为 $t+\Delta t$ 时刻充填流量，已充填管路长度；初始化参数为管路横截面积，推进剂密度，充填管路的总长度，管路的局部流阻和分布流阻。

3.3.3 燃烧室模块微分方程

设气路分段内氧化剂和燃料的质量瞬时值分别为 m_o 、 m_f ，则分段内的混合比的平均瞬时值 k 为

$$k = \frac{m_o}{m_f} \quad (9)$$

令 $q = q_{mo} + q_{mf}$ ， $m = m_o + m_f$ ，如果认为热导率和扩散系数为无限大（即气路瞬时充分混合模型），那么

整个气路分段上的燃气温度的瞬时值（在瞬时刚进入入口的那股燃气除外）是一样的，并等于气路分段出口的温度。忽略气路中的动能的变化，假设流动绝热。

燃烧室的微分方程为

$$\frac{V}{\gamma R T_c} \cdot \frac{dp_c}{dt} = \frac{T}{T_c} q - q_n \quad (10)$$

$$\frac{mdT_c}{dt} = (\gamma T - T_c) q - T_c (\gamma - 1) q_n \quad (11)$$

$$\frac{dK_c}{dt} = (k+1) (q_{mo} - k q_{mf}) \frac{R T_c}{p_c V} \quad (12)$$

式中， R 是气体常数； V 是容腔体积； $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ （等熵指数）， c_v 是定容比热容， c_p 是定压比热容； R 、 γ 由热力计算确定； T_c 为燃烧室温度； q_n 为喷管流量。

模块输入参数为 t 时刻进入燃烧室的氧化剂流量、燃料流量；输出参数为 $t+\Delta t$ 时刻燃烧室混合比，压力及温度。

3.3.4 喷管模块

当 $\frac{p_a}{p_c} \leq \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ 时，

$$q_n = \frac{p_c A_t}{\sqrt{R T_c}} \sqrt{\gamma \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} \quad (13)$$

$\frac{p_a}{p_c} > \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ 时，

$$q_n = \frac{p_c A_t}{\sqrt{R T_c}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p_a}{p_c} \right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_a}{p_c} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right]} \quad (14)$$

式中， A_t 为喷管喉部直径； p_a 为环境压力。

输入参数为 $t-\tau$ 时刻进入喷管的压力，温度及混合比；输出参数为 $t+\Delta t$ 时刻流出喷管的氧化剂流量、燃料流量；而该模块的初始化参数为燃烧室容积、燃烧时滞、燃气 RT 值与压力和混合比插值关系或数值表格。

至此，发动机完整的动态数学模型共含有 13 个方程（方程(12)、(13) 在同一时刻仅取一个），13 个未知数，构成了一个可解动态数学模型。基于

Matlab 中的 Simulink 图形输入交互式仿真环境下进行的带有集中参数的动态连续系统仿真。

4 基于非线性理论的轨道稳定性分析

对于大型复杂的液体火箭发动机系统数学模型, 直接从微分方程上分析实在很有难度。在非线形理论中提出了一种更简单、更容易操作的时间序列分析法, 它的基本思想是一个变量随时间的变化是由整个系统的运动规律支配的, 其必然隐含整个系统的运动规律。类似于一个“黑箱”, 利用它的输出数据推测系统稳定性, 从而告诉我们黑箱里面的东西。

4.1 相空间重构

当得到系统时间序列 $y(t)$ 后, 用非线性理论中的时间延迟法, 适当选取一时间延迟量 τ , 取 $y(t), y(t+\tau), y(t+2\tau), \dots, y[t+(m-1)\tau]$ 为坐标, 构造一个 m 维的相空间, m 称为嵌入维, 选取嵌入维改进算法见有关文献。嵌入时间序列可以被认为是一个几何轨道, 这样重构后相空间轨线的分布和结构 (吸引子) 便可反映系统的运动特征。

4.2 最大李雅普诺夫指数

系统的李雅普诺夫指数可有效地表征系统运动特征。李雅普诺夫指数集决定系统在相空间轨线 (吸引子) 的性质。最大李雅普诺夫指数 λ_1 取值的正负和大小表示长时间系统在相空间中相邻轨线沿该方向平均发散 ($\lambda_1 > 0$) 或收敛 ($\lambda_1 < 0$ 时) 的快慢程度。基于文献中的改进算法, 我们可以从单变量的时间序列获得最大李雅普诺夫指数。

其具体做法是: 给定嵌入空间上的时刻 t_0 的一个原点, 用穷举法找出该点在欧式距离下的最近临点。用 $L(t_0)$ 表示这两点之间的距离。在下一时刻 t_1 , 原始尺度将演化成 $L'(t_0)$ 。如此代换, 直至遍历所有数据, 则在该点 λ_1 的估计值

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_m - t_0} \sum_{k=1}^M \log_2 \frac{L'(t_k)}{L(t_{k-1})} \quad (15)$$

其中, M 为代换总步数。

4.3 关联维数

分形理论作为研究非线性复杂系统特性的科

学, 不对研究对象进行简化和抽象而去认识其在规律性。分形维数是刻画系统无序性和复杂度的特征量。对于复杂非线性系统, 通过分形维数的计算, 能够反映构成该系统的吸引子的复杂度。在对分形的诸多定义中, 关联维对吸引子的不均匀性反映最敏感并且比其它分形维更简便, 更易计算, 并且可以直接从时间序列中提取计算, 因而在非线性稳定性分析中被广泛采用。定义关联函数

$$C(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} \theta(\varepsilon - |x_i - x_j|) \quad (16)$$

式中, N 表示相空间代表点的数目, ε 是相空间中给定超小球的半径, θ 是阶跃函数, 其定义为

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \\ 0, & \text{当 } x \leq 0 \end{cases} \quad (17)$$

根据 $\theta(x)$ 的定义可以看出, 相空间中两状态代表点 i 和 j 之间距离 $|x_i - x_j|$ 小于某一给定值 ε 时, 关联维数的计算式为

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \ln C(\varepsilon) / \ln(\varepsilon) \quad (18)$$

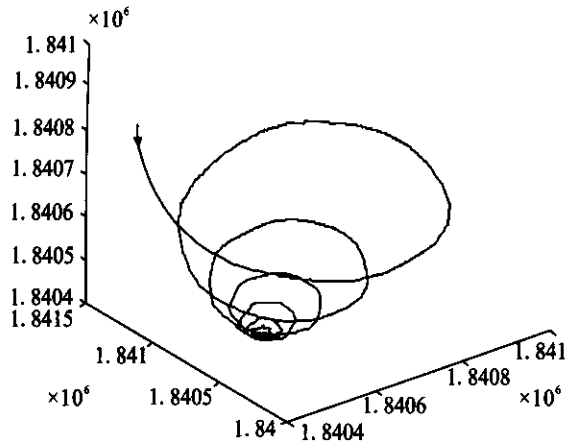
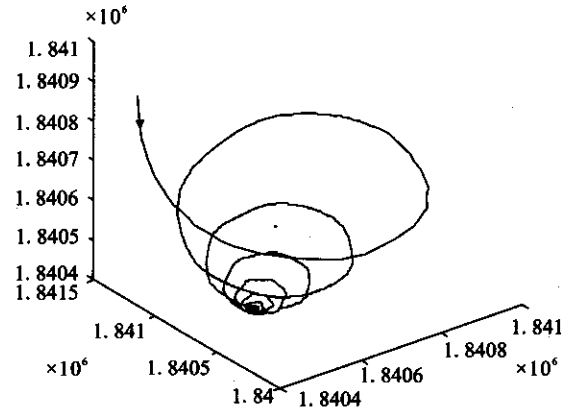
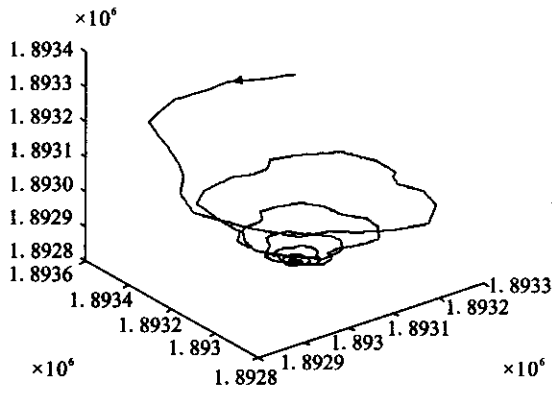
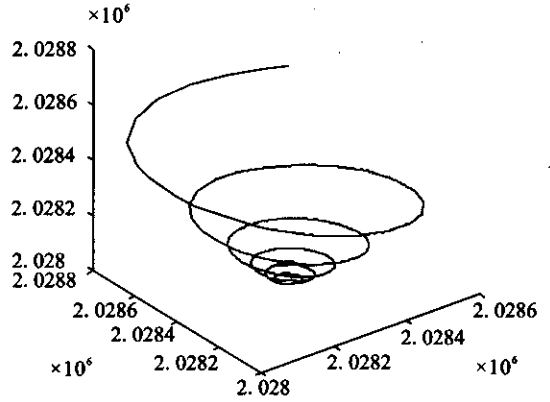
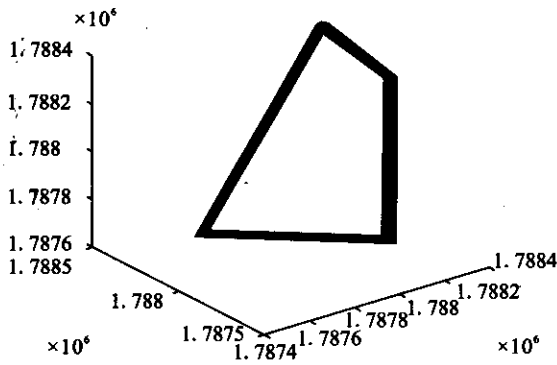
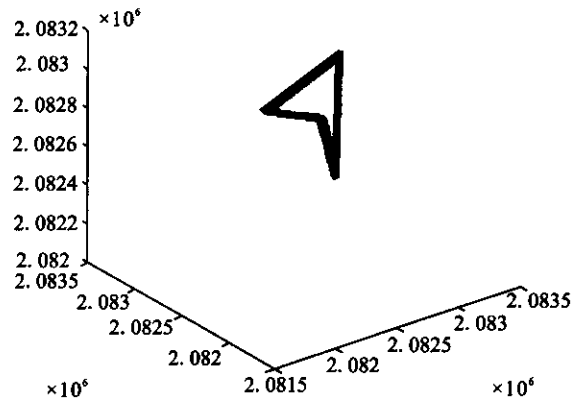
4.4 计算结果分析

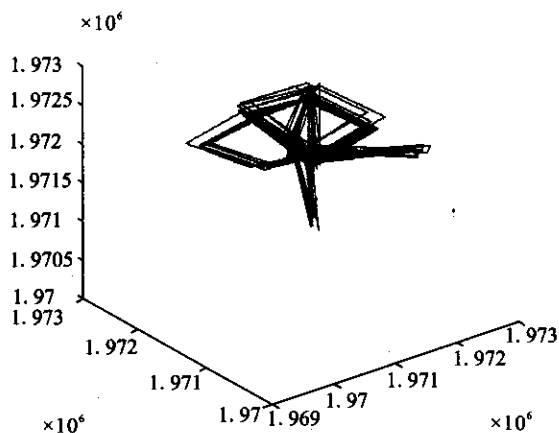
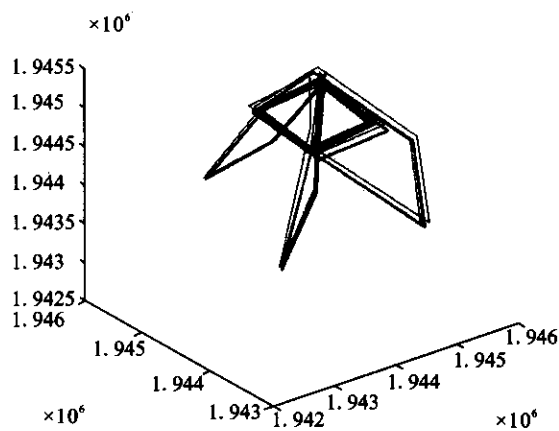
考虑喷管直径的变化对系统稳定性影响, 图 1~8 分别是其对应的相图。根据文献中的改进算法编程计算最大李雅普诺夫指数和分维数, 结果见表 1。

表 1 各时间序列下的最大李雅普诺夫指数和关联维数值

Tab.1 The max Lyapunov exponent and correlation dimension of each time series

时间序列	李雅普诺夫指数	关联维数值
$D_w=0.0086$	-28.23511	0.058185
$D_w=0.0085$	-35.176767	0.030048
$D_w=0.0084$	-44.30229	0.029422
$D_w=0.0083$	-43.33324	0.029604
$D_w=0.0082$	-24.02751	0.12618
$D_w=0.0081$	-22.35276	0.12762
$D_w=0.0080$	-43.85513	0.029927
$D_w=0.0079$	-18.19512	0.12917

图 1 $d_w=0.0085\text{m}$ 时的相图Fig.1 Phase map for $d_w=0.0085\text{m}$ 图 2 $d_w=0.0084\text{m}$ 时的相图Fig.2 Phase map for $d_w=0.0084\text{m}$ 图 3 $d_w=0.0083\text{m}$ 时的相图Fig.3 Phase map for $d_w=0.0083\text{m}$ 图 4 $d_w=0.0080\text{m}$ 时的相图Fig.4 Phase map for $d_w=0.0080\text{m}$ 图 5 $d_w=0.0086\text{m}$ 时的相图Fig.5 Phase map for $d_w=0.0086\text{m}$ 图 6 $d_w=0.0079\text{m}$ 时的相图Fig.6 Phase map for $d_w=0.0079\text{m}$

图 7 $d_{ic}=0.0082m$ 时的相图Fig.7 Phase map for $d_{ic}=0.0082m$ 图 8 $d_{ic}=0.0081m$ 时的相图Fig.8 Phase map for $d_{ic}=0.0081m$

由以上图像看出，喷管喉部直径由大变小时，从燃烧室压力时间序列的变化趋势几乎看不出端倪。定性地看其各自对应的相轨迹图像，不难发现 D_{ic} 在 0.0085m、0.0084m、0.0083m 以及 0.0080m 时，轨道具有稳定的收点，轨道收缩（最后变成一点），是典型的点吸引子结构。系统可以说是渐进稳定的。 $D_{ic}=0.0086m$ 和 0.0079m 属于一个类型，压力最终围绕几个值作振荡，系统在一个有限的区域内运动，整体稳定但局部不稳定。 $D_{ic}=0.0082m$ 和 0.0081m 时，压力的振荡范围变大，且具体围绕谁振荡更加不确定，其值跳跃的厉害，系统显得复杂无序，但仍然是全局稳定但局部不稳定。

从定量上分析， $D_{ic}=0.0085m$ 、0.0084m、0.0083m 和 0.0080m 时，李雅普诺夫指数绝对值较大，分维数较小，说明其轨道收敛速度更快，吸引子不均匀性更小。而 $D_{ic}=0.0082m$ 和 0.0081m 时，李雅普诺夫指数绝对值减小，说明轨道整体还是收敛，但速度不快，分维数较之 0.0029 也明显增大，表明系统无序性和复杂度也增加。

对于结构复杂，运动敏感的液体火箭发动机系统，我们在选择参数时当然要充分考虑以上定性定量分析的所有结果，不仅满足全局稳定还要满足局部稳定，要让相轨道收缩速度尽量快，同时系统的无序性、复杂度以及吸引子的不均匀性尽量小，使发动机的稳定性能更加良好。故而在

所讨论研究的几个直径中，选择 $D_{ic}=0.0085m \sim 0.0083m$ 和 0.0082m 时，能够收到较良好的稳定性能。

5 结论

(1) 本文的侧重点是理论方法性研究，选取某挤压式单台空间发动机为研究对象，在不同喷管喉部直径的影响下，对系统的全局和局部稳定性进行了定性（相空间结构）定量（李雅普诺夫指数、分维数）计算分析，得到了使系统整体局部均稳定的最佳选择参数。

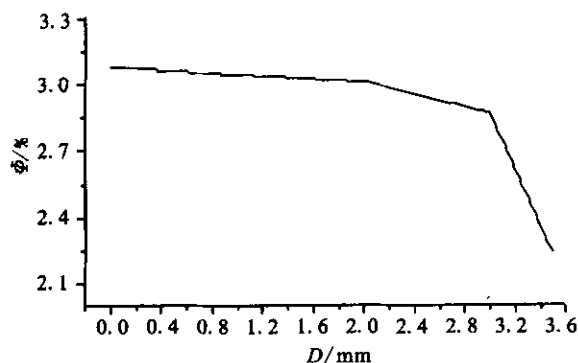
(2) 此方法不适用于高阶非线性系统和高维相空间，当维数大于三维时，相空间失去几何直观性。

(3) 此方法不仅对发动机设计提供借鉴意义，还可以将它应用于发动机试车试验和故障诊断方面，有很好的指导意义。

参考文献：

- [1] Liu WeiDong, K F Ren, etc. Global vector field reconstruction of nonlinear dynamical systems from a time series with SVD method and validation with Lyapunov exponents[J]. Chinese Physics, 2003, Vol:12:1366-1373.

(下转第 27 页)



(c) 回流率随直径的变化

图 6 进气孔面积对回流区特性的影响

Fig.6 The influence of the air inlet area on flow field

4 结论

- (1) 槽宽是影响回流区特性的主要结构参数。槽宽增大，回流区变长，回流率和总压损失增大。
- (2) 槽宽相同，蒸发管出气孔和主气流夹角

不同时，总压损失几乎相同，但存在一个最佳的夹角使回流率最大。

(3) 槽宽相同，在一定范围内，进气孔面积越大，总压损失、回流率和回流区长度均越小，但总的来说，进气孔面积对回流区特性影响不大。

参考文献：

- [1] 刘兴洲. 飞航导弹动力装置 (上册)[M]. 北京: 宇航出版社, 1992, 12.
- [2] 岳连捷. 尾缘吹气式火焰稳定器研究 [D]. 北京: 航空航天大学博士学位论文, 2001.
- [3] 岳连捷, 杨茂林, 黄勇, 徐行. 尾缘吹气式火焰稳定器流场计算[J]. 航空发动机, 1998, (2).
- [4] 刘鸿, 王方, 王家骅. 特种 V 型蒸发式火焰稳定器的总压损失试验研究 [J]. 江苏石油化工学院学报, 2002, (9).
- [5] 王玉峰, 段小龙. 冲压发动机点火前内流场数值仿真研究[J]. 火箭推进, 2006, (32)6.

(编辑: 陈红霞)

(上接第 17 页)

- [2] 刘红军. 补燃循环发动机静态特性与动态响应特性研究 [D]. 西安: 航天工业总公司第十一研究所, 1998.
- [3] 刘秉正, 彭建华. 非线性动力学[M]. 北京: 高等教育出版社.
- [4] Michael T Rosenstein, James J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets [J]. Physica D 65 (1993) 117-134.
- [5] Packard N H, Crutchfield J P, Farmer J D, etc. Geometry from a time series[J]. Phys Rev Lett, 1980, 45:712-715.

- [6] Lai Ying-cheng, Lerner David. Effective scaling regime for computing the correlation dimension from chaotic time series[J]. Physica D, 1998, 115 (4) :1-18.
- [7] Wolf A. Determining Lyapunov exponents from a time series [J]. Physica D, 1985, Vol: 16:285-317.
- [8] 姜桂仁. 混沌时序的特征量分析及相空间重构 [D]. 江苏: 江苏大学研究生院, 2005.
- [9] 张青松, 张振鹏. 液氢液氧火箭发动机非线性静态特性仿真与分析[J]. 火箭推进, 2006, 32(6).

(编辑: 陈红霞)