

# 水击问题的 Fourier 谱方法计算

陈宏玉, 刘红军, 刘 上

(西安航天动力研究所, 陕西 西安 710100)

**摘 要:** 给出了推进剂供应系统管路内流体瞬变流动的数学模型, 提出了采用 Fourier 谱方法求解瞬变流非线性偏微分方程的新方法。以一段两端分别连接贮箱和阀的直管道为例, 利用该方法对阀门关闭后管道中形成的水击和压力振荡特性进行了求解, 给出了相应的仿真结果, 与已发表的采用特征线法和有限元法求解结果进行了比较。对数值计算中的非物理振荡问题进行了讨论。

**关键词:** 液体火箭发动机; 推进剂输送; Fourier 谱方法; 数值模拟

**中图分类号:** V434-34 **文献标识码:** A **文章编号:** 1672-9374 (2012) 03-0007-05

## Spectral-Fourier method for water hammer

CHEN Hong-yu, LIU Hong-jun, LIU Shang

(Xi'an Aerospace Propulsion Institute, Xi'an 710100, China)

**Abstract:** The mathematical model of fluid transient inside propellant pipelines is introduced. A new algorithm is proposed to solve the nonlinear hyperbolic partial differential equations for governing the fluid transient by spectral-Fourier method. The method is presented in detail with an illustration of the water hammer in a simple piping system connecting tank and valve. The water hammer and pressure oscillation formed in the pipeline when its valve is suddenly shut down were solved with the method. The corresponding simulation results are given and compared with the results obtained by method of characteristics and finite element method issued previously. The high frequency oscillation problem in the numerical calculation is also discussed.

**Keywords:** liquid rocket engine; propellant transfer; spectral-Fourier method; numerical simulation

## 0 引言

液体火箭发动机关机时, 推进剂供应系统由于阀门关闭或涡轮泵减速等因素影响, 不可避免

地会在管路中形成水击和压力振荡。这种水击压力波动会造成诸如推进剂泄漏、结构破坏和推力输出精度降低等一系列问题, 在发动机设计中需要对其进行深入分析。

水击问题可由一维瞬变流动基本方程描述,

收稿日期: 2012-04-06; 修回日期: 2012-04-28

基金项目: 国家“863”项目(2007AA705302)

作者简介: 陈宏玉 (1982—), 男, 博士研究生, 研究领域为液体火箭发动机系统与总体技术

它们是一组非线性双曲型偏微分方程, 一般情况下不存在解析解, 只能采用数值计算方法求解。特征线法由于其具有较高的计算精度, 数值方法简便, 运算稳定性较好和易于编程等特点广泛应用在水击问题的分析中<sup>[1-4]</sup>。但由于推进剂供应管路系统是包括液路、气路和容腔的复杂管网系统, 因此采用特征线法在时间步长协调上比较困难, 边界条件的处理也比较复杂, 而且非线性迭代解算收敛较慢<sup>[5]</sup>。常用求解水击问题的方法还有有限元法<sup>[6-8]</sup>、有限体积法<sup>[9]</sup>和无网格法<sup>[10]</sup>等。

Quarteroni, Canuto 和郭本瑜等<sup>[11-12]</sup>提出并发展的谱方法 (Spectral Method) 提供了除有限差分法和有限元法之外的第三类数值计算方法, 开辟了数值计算的全新领域。谱方法的最大优点是所谓“无穷阶收敛性”, 即如果原问题的解充分光滑, 那么用适当的谱方法所求得的近似解将以基函数个数的任意次幂速度收敛于精确解。本文采用谱方法中的 Fourier 谱方法就推进剂供应系统管路中阀门关闭形成的水击问题进行数值计算, 给出了数学模型, 求解原理、求解方法及仿真结果, 并将该结果与已发表的采用特性线法和有限元法的求解结果进行了比较。

## 1 一维瞬变流动控制方程

假设管道内推进剂流动是一维绝热有摩擦的液体瞬变流, 摩擦损失均按准稳态处理, 则描述管道内液体瞬变流的基本方程包括连续方程和运动方程, 是一组拟线性双曲型偏微分方程, 具体形式如下<sup>[4]</sup>:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in [0, L] \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{f}{2D} u |u| + g \cos \theta = 0, \quad x \in [0, L] \quad (2)$$

式中:  $p$  为  $x$  断面的流体平均压力;  $u$  为  $x$  断面的流体平均流速;  $\rho$  为流体密度;  $a$  为压力波传播速度;  $f$  为管壁摩擦损失系数;  $g$  为质量场加速度;  $\theta$  为管流轴线方向与加速度方向的夹角。

式 (1) 和 (2) 即为管内非定常流的基本方

程, 又称波动方程。在一般流体管道中, 有  $a \gg u$ , 故可略去式 (1) 和 (2) 中第二项, 对于水平直管还可忽略重力场影响。在此基础上, 令

$$y = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{ta}{L}, \quad \varphi = \frac{p}{p_0}, \quad U = \frac{u}{a}, \quad \varepsilon = \frac{p_0}{\rho a^2}, \quad \mu = \frac{fL}{2D}$$

那么, 可得无量纲波动方程:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad y \in [0, 1] \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu U |U| = 0, \quad y \in [0, 1] \quad (4)$$

式中:  $p_0$  为管道内液体初始压力。

## 2 Fourier 谱方法求解

### 2.1 Fourier 谱方法

谱方法源于经典的 Ritz-Galerkin 方法, 以整体无限光滑的函数系 (例如: Fourier 级数, Chebyshev 多项式, Legendre 多项式等) 作为基函数, 对定义在计算域中的函数进行近似, 然后结合加权余量法对偏微分方程进行求解。推进剂供应系统管路中流体瞬变特性具有时间周期性, 因此可通过选用特殊的周期函数 (Fourier 级数) 作为基函数, 将未知函数分解展开成空间变量基与时间函数系数的分离变量形式的解式。这里将液体无量纲压力  $\varphi(y, \tau)$  作 Fourier 正弦级数展开, 液体无量纲流速  $U(y, \tau)$  作 Fourier 余弦级数展开。

$$\begin{aligned} \varphi(y, \tau) &\approx \varphi(0, \tau) + y[\varphi(1, \tau) - \varphi(0, \tau)] + \\ &2 \sum_{k=1}^N \left[ \frac{(-1)^k \varphi(1, \tau) - \varphi(0, \tau)}{k\pi} + \varphi_k(\tau) \right] \sin(k\pi y) \end{aligned} \quad (5)$$

$$U(y, \tau) \approx U_0(\tau) + 2 \sum_{k=1}^N U_k(\tau) \cos(k\pi y) \quad (6)$$

式 (5) 是通过  $\varphi_y(y, \tau)$  的 Fourier 余弦级数展开, 然后逐项积分所得。式 (5) 和 (6) 中, 与时间相关的系数  $\varphi_k(\tau)$  和  $U_k(\tau)$  为:

$$\varphi_k(y, \tau) = \int_0^1 \varphi(y, \tau) \sin(k\pi y) dy \quad (7)$$

$$U_k(\tau) = \int_0^1 U(y, \tau) \cos(k\pi y) dy \quad (8)$$

式中,  $k \in [1, 2, \dots, N]$ 。这样, 非线性无量纲控制

方程 (3) 和 (4) 求解就转换为确定系数函数  $\varphi_k(\tau)$  和  $U_k(\tau)$  的形式。Fourier 谱展开的项数  $N$  选取取决于计算精度。

将液体无量纲压力  $\varphi(y, \tau)$ 、流速  $U(y, \tau)$  的 Fourier 谱展开式 (5) 和 (6) 代入方程 (3) 和 (4) 中, 得:

$$\frac{d\varphi_k(\tau)}{d\tau} = \frac{k\pi}{\varepsilon} U_k(\tau) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{dU_k(\tau)}{d\tau} = & -k\pi\varepsilon\varphi_k(\tau) + \\ & \varepsilon[\varphi(0, \tau) - (-1)^k \varphi(1, \tau)] - \\ & \int_0^1 \mu \cos(k\pi y) U(y, \tau) |U(y, \tau)| dy \end{aligned} \quad (10)$$

值得注意的是, 非线性摩擦积分项出现在方程 (10) 中, 令

$$W \equiv \mu U(y, \tau) |U(y, \tau)|$$

对摩擦项积分,  $W$  的 Fourier 余弦系数可表达成离散的 Fourier 变换形式

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mu \cos(k\pi y) U(y, \tau) |U(y, \tau)| dy = \\ \frac{1}{2K} [W(0, \tau) + (-1)^k W(0, \tau)] + \\ \frac{1}{K} \sum_{p=1}^{K-1} W(y_p, \tau) \cos(k\pi y_p) \end{aligned} \quad (11)$$

式中:  $y_p = p/K$ 。

式 (9) 和 (10) 未考虑边界问题, 在具体应用时, 带入边界条件和初值, 可得展开系数  $\varphi_k(t)$ ,  $U_k(t)$  ( $k=0, 1, 2, \dots, N$ )。再将其带入式 (5) 和 (6) 中, 即可求得管路内液体瞬变流的近似解。为了适应谱方法的高精度并保证时程积分的稳定性, 采用具有四阶精度的 Runge-Kutta 积分法。

## 2.2 非物理性振荡问题

应用谱方法求解管道内流体瞬变流动时, 会遇到带有大梯度甚至间断的问题 (如水击问题)。在它们附近数值解会出现大幅度的 Gibbs 类型的振荡。为了克服这种困难, 学者们提出很多改进方法, 其中包括超粘性方法、滤波法和谱粘性消去法 (SVV) 等<sup>[13-14]</sup>。其中滤波法主要思想是用一个允许低频波通过的滤波因子使得导致数值不稳定的高频波大大减弱, 那么谱方法在处理水击和其它间断处的振荡基本上被抑制。

文中采用滤波法消除因间断导致的非物理振荡, 对无量纲压力和无量纲流量的展开系数  $\varphi_k(\tau)$  和  $U_k(\tau)$  乘以滤波因子  $\sigma_k$ 。 $\sigma_k$  为

$$\sigma_k = \sigma(k/K) = e^{-\alpha(k/K)^\eta} \quad (12)$$

式中: 系数  $\alpha$  和  $\eta$  的取值参考文献 [14]。

## 3 算例及结果分析

为了验证 Fourier 谱方法计算水击问题的有效性, 对文献 [15] 中的单管阀门关断问题 (见图 1) 进行了仿真计算。问题描述: 流体介质为水, 原始参数:  $p_T=15.0$  MPa,  $p_E=14.8$  MPa, 水平圆管长度  $L=4.8$  m, 内径  $D=0.01$  m,  $\rho=1\ 000$  kg/m<sup>3</sup>,  $\alpha=1\ 200$  m/s,  $C_V A_V=0.7$  A,  $A$  为管道流通面积, 摩擦系数  $f=0.018$ 。

考虑阀门两种关闭方式:

(a) 管道阀门突然关闭;

(b) 按幂函数曲线关闭,  $\tau=(1-t/t_c)^m$ ,  $\tau_c=0.005$  s,  $m=1.5$ ,  $\tau=C_V A_V / \overline{C_V A_V}$ 。

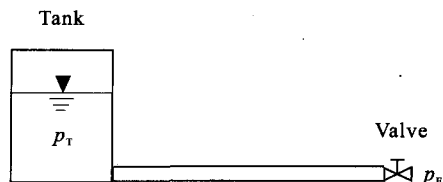


图 1 简单管路系统

Fig. 1 A simple pipeline system with valve and tank

按 Fourier 谱方法 (SFM) 的计算结果与按特征线方法 (MOC)<sup>[1]</sup>和分段集中参数有限单元法 (FEM)<sup>[8]</sup>的计算结果比较见图 2 和图 3。计算时, Fourier 展开项数取 8, 为保证特征线方法和有限单元的精度, 特征线方法分段数取为 40, 分段集中参数有限单元法取分段数为 50。由图可见: 采用 Fourier 谱方法计算单管水击问题无论是最大水击压力还是水击压力波的衰减速率都能与特征线方法和分段集中参数有限单元法保持一致。

滤波法的作用是避免因大梯度参数变化或间断问题引起计算时的非物理振荡。从图 4 可以看出, 如果不采用滤波技术, 在管内流体实际振荡

曲线上叠加一个高频振荡,而采用滤波技术能较好的抑制这一高频振荡。

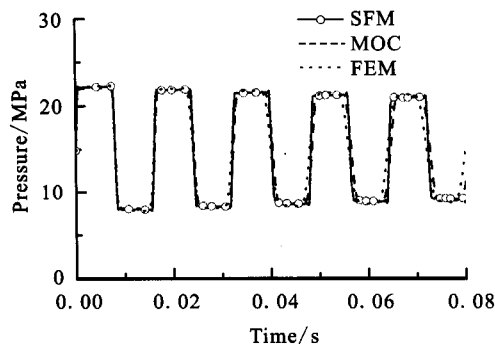


图2 阀门瞬时关闭时阀门上游压力变化

Fig. 2 Variation of upstream pressure of valve in the case of valve instantaneous closure

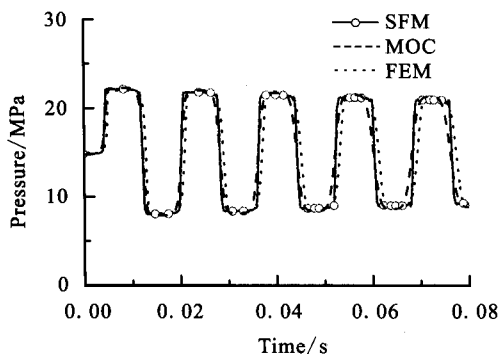


图3 阀门按幂函数曲线关闭时阀门上游压力变化

Fig. 3 variation of upstream pressure of valve in the case of valve closure in power function curve

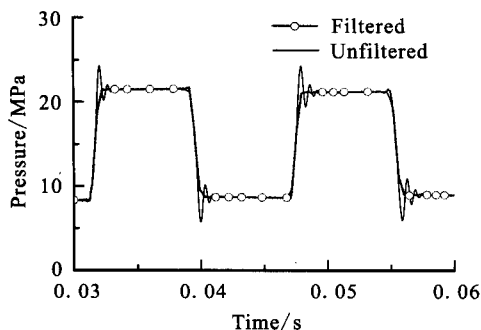


图4 谱滤波后计算结果对比

Fig. 4 Contrast of calculated results after filtering by spectral-Fourier method

图5给出了谱展开项数不同,利用无滤波的Fourier谱方法计算单管水击问题时,阀门上游压

力变化。可以看出,当Fourier展开项数由8项增加到16和32项时,由数值计算引起的高频振荡未能得到有效抑制,因此采用Fourier谱方法计算大梯度或间断问题时,增加展开项数并不能有效抑制非物理振荡。

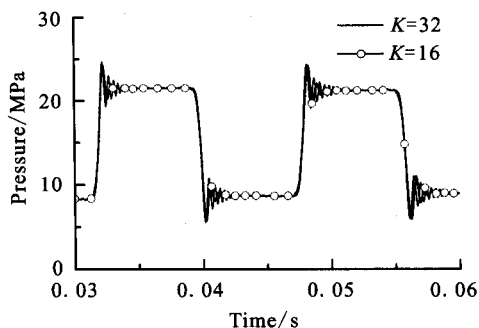


图5 Fourier展开项数对数值振荡的影响

Fig. 5 Influence of different Fourier terms on numerical oscillation

## 4 结论

推进剂供应系统管路水击问题的Fourier谱方法求解结果表明:

1) 将Fourier谱方法应用于推进剂供应系统管路水击这一强非线性问题计算时,求得结果与特征线法和分段集中参数有限单元法结果一致,表明方法和仿真结果可信。

2) 采用滤波技术能够较好地抑制数值解在间断处产生的非物理振荡。增加Fourier展开项数并不能有效抑制非物理振荡。

3) 采用Fourier谱方法求解一维瞬变流动模型时,边界处理简单,可以方便地连接集中参数元件,适用于复杂流体网络的建模与仿真,工程实际应用有广阔前景。

## 参考文献:

- [1] WYLIE E B, STREETER V L. Fluid transient in systems [M]. Endlewood Cliffs, USA: Prentice Hall, 1993.
- [2] RUTH E K, AIM H, BAKER R L, et al. Advanced liquid rocket engine transient model, AIAA1990-2299[R]. USA: AIAA, 1990.

- [3] SAGNICK H D, KRFILL G. Numerical simulation of transients in feed systems for cryogenic rocket engines, AIAA 95-2967 [R]. USA: AIAA, 1995.
- [4] 林景松, 王平阳, 高红, 等. 液体火箭发动机关机水击的数值模拟[J]. 上海航天, 2008, 25 (3): 53-57.
- [5] 张育林, 刘昆, 程谋森. 液体火箭发动机动力学理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [6] KOLCIO K, HELMICKI A J, JAWOOD S. Propulsion system modeling for condition monitoring and control: part I theoretical foundation, AIAA 94-3227[R]. USA: AIAA, 1994.
- [7] KOLCIO K, HELMICKI A J, JAWOOD S. Propulsion system modeling for condition monitoring and control: part II application to the SSME AIAA 94-3228 [R]. USA: AIAA, 1994.
- [8] 刘昆, 张育林. 一维可压缩流的有限元状态空间模型[J]. 推进技术, 1999, 19(5): 62-66.
- [9] MAJUMDAR A k. Numerical modeling of fluid transient by a finite volume procedure for rocket propulsion systems [C]// Proceedings of 4th ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference. Honolulu, Hawaii, USA: ASME/JSME, 2003: 2967-2974.
- [10] TIJSSELING A S, BERGANT A. Meshless computation of water hammer [C]//Proceedings of 2nd IAHR International Meeting of the Workgroup on Cavitation and Dynamic Problems in Hydraulic Machinery and Systems. Timisoara, Romania: IAHR, 2007: 1-34.
- [11] CANUTO C, QUARTERONI A. Approximation results for orthogonal polynomials in Sobolev spaces[J]. Math Compu, 1982, 38(1): 67-86.
- [12] GUO B Y. Spectral methods and their applications [M]. Singapore: World Scientific, 1998.
- [13] MA H P. Chebyshev-Legendre super spectral viscosity method for nonlinear conservation laws [J]. SIAM J. Numer. Anal., 1998, 35 (3): 893-908.
- [14] SHEN Jie, TANG Tao. Spectral and high-order methods with applications[M]. Beijing: Science Press, 2006.
- [15] 刘昆, 张育林. 推进剂供应管道的集中参数近似模型研究-模态近似模型[J]. 推进技术, 1998, 19(4): 41-45.

(编辑: 王建喜)

(上接第 6 页)

- [2] FREEBURN F D, HELSEL R H. Engine orbital maneuvering engine feed system coupled stability investigation NASA CR-144409 [R]. USA: NASA, 1975.
- [3] BAZAROV V Y. Liquid-propellant rocket engine injector dynamics [J]. Journal of Propulsion and Power, 1998, 14 (5): 797-806.
- [4] BAZAROV V G. Design of injectors for self-sustaining of combustion chambers stability AIAA 2006-4722 [R]. USA: AIAA, 2006.
- [5] RICHARDSON R. Linear and nonlinear dynamics of swirl injectors [D]. USA: Purdue University, 2007.
- [6] ISMAILOV M, HEISTER S D. Nonlinear modeling of classical swirl injector dynamics AIAA 2009-5402 [R]. USA: AIAA, 2009.
- [7] 杨立军, 张向阳. 敞口型离心喷嘴动力学特性理论分析[J]. 推进技术, 2006, 27(6): 497-500.
- [8] YANG Li-jun, FU Qing-fei. Theoretical study of dynamic characteristic of open-end liquid swirl injector IAC-06-C4.P.3.09[R]. [S.I.]: IAC, 2006
- [9] FU Qing-fei, YANG Li-jun. Theoretical and experimental study of the dynamics of a liquid swirl injector[J]. Journal of Propulsion and Power, 2010, 26(1): 94-101.

(编辑: 王建喜)