

配置点谱方法求解推进剂供应管路瞬变流动

陈宏玉, 刘红军, 刘 上

(西安航天动力研究所, 陕西 西安 710100)

摘 要: 基于一维管道瞬变流理论和数值谱方法, 给出了求解推进剂供应系统管路内液体瞬变流控制方程的 Chebyshev 配置点谱方法, 通过将“超谱粘性项”引入控制方程, 有效地消除了由于解的间断或大梯度变化引起的数值振荡。以一段两端分别连接贮箱和阀门的等截面圆直管为例, 利用该方法对阀门关闭后管道内水击现象进行了计算, 给出了相应的水击压力仿真结果, 并分别与采用特征线法和有限元法求解的结果进行了分析比较, 论证了 Chebyshev 配置点谱方法求解推进剂供应管路内流体瞬变流的可行性。

关键词: 液体火箭发动机; 推进剂输送; 配置点谱方法; 数值模拟

中图分类号: V421.42 **文献标识码:** A **文章编号:** 1672-9374 (2013) 04-0024-06

Solution of transient flow in propellant pipelines by Chebyshev spectral collocation method

CHEN Hong-yu, LIU Hong-jun, LIU Shang

(Xi'an Aerospace Propulsion Institute, Xi'an 710100, China)

Abstract: A new fast and efficient algorithm, Chebyshev spectral collocation method (CSCM), is introduced to solve the hyperbolic partial differential equations governing the transient flow in the propellant pipelines. The numerical oscillation caused by solving the discontinuous or big gradient change was effectively eliminated by adding the super spectral viscosity term into transient flow control equations. Taking a uniform cross section pipe connecting the tank and valve as an example, the water hammer phenomenon, which appears when the pipe is closed, is calculated with the method. The simulation result under the corresponding water hammer pressure is offered and compared with the results obtained respectively from the characteristics method and finite element method. The feasibility of solving the transient flow in the propellant pipelines by CSCM is demonstrated.

Keywords: liquid propellant rocket engine; propellant transfer; Chebyshev spectral collocation method; numerical simulation

收稿日期: 2013-02-17; 修回日期: 2013-05-30

基金项目: 国家 863 项目(2006AA705311)

作者简介: 陈宏玉 (1982—), 男, 博士生, 研究领域为液体火箭发动机系统与总体技术

0 引言

推进剂供应系统管路内流体瞬变流动可由一维瞬变流基本方程组描述。它们是一对非线性双曲型偏微分方程组, 一般情况下不存在解析解, 只能采用数值计算的方法求解。特征线法 (MOC) 由于其具有较高的计算精度, 数值方法简便, 运算稳定性较好, 易于编程等特点广泛应用于流体管路的瞬变流分析中^[1-6], 推进剂供应管路系统是包括液路、气路和容腔的复杂管网系统, 采用特征线法在时间步长协调上比较困难, 边界条件的处理也比较复杂, 而且非线性迭代解算收敛较慢^[7]。限制了特征线法在复杂系统 (如补燃循环发动机) 动态特性分析方面的应用。常用求解瞬变流方程的方法还有有限单元法 (FEM)^[8-12]和有限体积法 (FVM)^[13-15]等, 采用分段集中参数方法近似描述分布参数对象, 存在一定的误差, 减小误差的有效途径是增加分段数。随着分段数的增加一方面计算量成倍增加, 计算效率降低; 另一方面模型刚性问题更加突出。因此, 如何提高数值计算的精度和效率, 增强算法的适应性是液体火箭发动机系统仿真领域仍需关注的问题。

Quarteroni, Canuto 和郭本瑜等提出并发展的谱方法 (Spectral Method) 提供了除有限差分和有限元法之外的第三类数值计算方法, 开辟了数值计算的全新领域^[16-17]。谱方法的最大优点是所谓“无穷阶收敛性”, 即如果原问题的解充分光滑, 那么用适当的谱方法所求得的近似解将以基函数个数的任意次幂速度收敛于精确解^[17]。但在管道内液体非定常流动分析中, 若存在参数间断或大梯度变化时 (如水击问题), 使用传统谱方法存在数值振荡, 即 Gibbs 现象, 逼近精度严重丧失。如何消除 Gibbs 现象, 也是谱方法近年来研究的重点和热点。本文详细介绍了谱方法中 Chebyshev 配置点谱方法求解推进剂供应系统管路内流体一维瞬变流动。通过引入超谱粘性项^[19-21], 有效地消除了传统谱方法中由于解的间断或大梯度变化引起的数值振荡。通过对单管水击问题进行数值计算, 验证了该方法的正确性和优越性。

1 一维瞬变流方程的 Chebyshev 配置点谱方法

1.1 一维非定常流动控制方程

假设管道内推进剂流动是一维绝热有摩擦的液体瞬变流, 摩擦损失均按准稳态处理, 则描述管道内液体瞬变流的基本方程包括连续方程和运动方程, 是一对拟线性双曲型偏微分方程组, 具体形式如下^[7]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in [0, L] \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{f}{2D} u |u| + g \cos \theta, \quad x \in [0, L] \quad (2)$$

式中: p 为 x 断面的流体平均压力; u 为 x 断面的流体平均流速; ρ 为流体密度; a 为压力波传播速度; f 为管壁摩擦损失系数; g 为质量场加速度; θ 为管流轴线方向与加速度方向的夹角。

式 (1) 和式 (2) 即为推进剂供应系统管路内流体瞬变流的基本方程, 又称波动方程。在一般流体管道中, 有 $a \gg u$, 故可略去式 (1) 和式 (2) 中第二项, 对于水平直管还可忽略重力场影响。在此基础上, 进行坐标变换, 令 $y = \frac{2}{L}x - 1$, 则求解域变换为 $y \in [-1, 1]$, 并令:

$$\tau = \frac{ta}{L}, \quad \varphi = \frac{p}{p_0}, \quad U = \frac{u}{a}$$

$$\lambda = \frac{p_0}{2}, \quad \mu = \frac{fL}{2D}$$

那么, 可得无量纲波动方程:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{2}{\lambda} \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad y \in [-1, 1] \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + 2\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu U |U| = 0, \quad y \in [-1, 1] \quad (4)$$

式中 p_0 为管道内液体初始压力。

1.2 Chebyshev 配置点谱方法

取空间 $L^2(\Omega)$ 的一组标准正交基函数为 $T_k(y) = \cos(k \cos^{-1} y)$, $k=0, 1, 2, \dots, N$, 令空间 S_N 为正交基函数 $T_k(y)$ 所张成的空间。用

Chebyshev- Gauss-Lobatto (CGL) 网格点 $y=y_j = -\cos \frac{\pi}{N}j$ ($j=0,1,2,\dots,N$) 剖分空间区域 $\Omega=[-1,1]$ 。

定义空间 S_N 的离散内积为 $(u,v)_N = \sum_{j=0}^N u(y_j)v(y_j)\omega_j$, 其中 ω_j 为权函数, 任意的 $u,v \in C^0[-1,1]$, 空间 $C^0[-1,1]$ 到 S_N 的插值算子为:

$$I_N u(y) = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k T_k(y), \quad k=0,1,2,\dots,N \quad (5)$$

Chebyshev 配置点谱方法实质上是一种用 CGL 网格点插值多项式 $I_N u(y)$ 的导数:

$$\left. \frac{dI_N u(y)}{dy} \right|_{y=y_j} = \sum_{k=0}^N \hat{u}'_k T'_k(y_j), \quad j=0,1,2,\dots,N \quad (6)$$

作为 $\left. \frac{du(y)}{dy} \right|_{y=y_j}$ 的近似, 代替原方程中的空间微商, 将原方程化为关于时间 t 的常微分方程来求解的数值方法。

再利用 Chebyshev 多项式的正交性:

$$\sum_{j=0}^N \frac{1}{c_j} T_m(y_j) T_p(y_j) = \begin{cases} N, & m=p=0, N \\ N/2, & m=p \neq 0, N \\ 0, & m \neq p \end{cases} \quad (7)$$

则可求得未知量 u 的谱展开系数:

$$\hat{u}_k = \frac{2}{c_k N} \sum_{j=0}^N \frac{1}{c_j} u_j T_k(y_j), \quad k=0,1,2,\dots,N \quad (8)$$

其中

$$c_k = \begin{cases} 2, & k=0, N \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

插值多项式 $I_N u(y)$ 的导数的谱展开系数 \hat{u}'_k 可通过 \hat{u}'_k 的后向迭代关系获得:

$$c_k \hat{u}'_k = \hat{u}'_{k+2} + 2(k+1) \hat{u}'_{k+1}, \quad k=0,1,2,\dots,N-1 \quad (9)$$

$$\hat{u}'_N = \hat{u}'_{N+1} = 0 \quad (10)$$

Chebyshev 配置点谱方法对空间导数的求解可以采用直接矩阵乘积的方法求得, 此时插值多项式 (5) 可用拉格朗日多项式 $g_k(y)$ 表示为:

$$I_N u(y) = \sum_{k=0}^N u(y_k) g_k(y) \quad (11)$$

$$g_k(y) = \frac{(1-y^2) T'_k(y) (-1)^{k+1}}{c_k N^2 (y-y_k)} \quad (12)$$

则

$$\left. \frac{dI_N u(y)}{dy} \right|_{y=y_j} = \sum_{k=0}^N D_{jk} u(y_k) \quad (13)$$

式中 $D_{jk} = g'_{jk}(y_j)$ 为 Chebyshev 微分矩阵, 具体表达式为:

$$D_{jk} = \begin{cases} \frac{c_j (-1)^{j+k}}{c_k y_k - y_j}, & j \neq k \\ \frac{y_j}{2(1-y_j^2)}, & 1 \leq j=k \leq N-1 \\ -\frac{2N^2+1}{6}, & j=k=0 \\ \frac{2N^2+1}{6}, & j=k=N \end{cases} \quad (14)$$

而对于未知量 $u(y)$ 的二阶导数有:

$$\left. \frac{d^2 I_N u(y)}{dy^2} \right|_{y=y_j} = \sum_{k=0}^N (D^2)_{jk} u(y_k) \quad (15)$$

更高阶空间导数的 Chebyshev 微分矩阵可参考文献 [18]。

1.3 控制方程的 Chebyshev 配置点谱方法求解

选用 Chebyshev 配置点谱方法求解偏微分方程 (3) 和 (4) 时, CGL 网格点为 $y_j = -\cos \frac{\pi}{N}j$, $j=0,1,2,\dots,N$, 方程中空间导数项 $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial U}{\partial y}$ 在 CGL 网格点处的值可近似为:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y_i, t) \approx \sum_{j=0}^N D_{ij} \varphi(y_j, t), \quad i=0,1,2,\dots,N \quad (16)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(y_i, t) \approx \sum_{j=0}^N D_{ij} U(y_j, t), \quad i=0,1,2,\dots,N \quad (17)$$

对于具有间断解的问题 (如水击问题等), 直接应用配置点谱方法往往会导致失败。在间断点附近会有很大的振荡, 这类问题可通过在方程中引入粘性项加以解决, 称为超谱粘性法^[19-21]。现将近似解 (16) 和 (17) 带入波动方程 (3) 和 (4) 中, 并引入超谱粘性项。

$$\frac{d\varphi}{d\tau}(y_i, t) + \frac{2}{\lambda} \sum_{j=0}^N D_{ij} U(y_j, t) = \varepsilon (-1)^{s+1} Q^{2s} \varphi(y_j, t) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\tau}(y_i, t) + 2\lambda \sum_{j=0}^N D_{ij} \varphi(y_j, t) + \mu U(y_j, t) |U(y_j, t)| \\ = \varepsilon (-1)^{s+1} Q^{2s} U(y_j, t) \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} j=0, 1, 2, \dots, N \\ \varepsilon = CN^{1-2s} \\ Q = \sqrt{1-y^2} \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \quad (20)$$

式中: ε 为粘性振幅; Q 为粘性算子。先对 Chebyshev 多项式求 Q^2 算子:

$$\begin{aligned} Q^2 T_k(y) &= \sqrt{1-y^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\sqrt{1-y^2} \frac{\partial}{\partial y} T_k(y) \right] \\ &= -k^2 T_k(y) \end{aligned} \quad (21)$$

可知, Chebyshev 多项式可认为是 Q^2 算子在特征值为 $-k^2$ 时的特征函数^[21]。

方程 (18) 和 (19) 中未考虑具体边界, 在具体应用中, 用边界条件代替上式中相应项, 即可求解。常微分方程 (18) 和 (19) 采用经典 4 阶 Runge-Kutta 法。

2 算例验证及结果分析

为了验证本文方法的有效性, 对文献 [22-23] 中的单管阀门关断问题 (如图 1) 进行了仿真计算。问题描述如下: 流体介质为水, 原始参数: $p_T=15.0$ MPa, $p_E=14.8$ MPa, 水平圆管长度 $L=4.8$ m, 内径 $D=0.01$ m, $\rho=1\ 000$ kg/m³, $a=1\ 200$ m/s, $C_{AV}=0.7A$ 。 A 为管道流通面积; 摩擦系数 $f=0.018$ 。

考虑阀门两种关闭方式:

1) 管道阀门突然关闭;

2) 按幂函数曲线关闭 $\tau=(1-t/t_c)^m$, $t_c=0.005$ s,

$m=1.5$, $\tau=C_{AV}\sqrt{C_V A_V}$ 。

按本文方法 (CSCM) 的计算结果与按特征线方法 (MOC) 和有限单元法 (FEM) 的计算结果的

比较见图 2 和图 3。计算时, CGL 网格点数取 16, 为保证特征线方法和有限单元的精度, 特征线方法网格点数取为 40, 有限元法取分段数为 50。由图 2 和图 3 可见: 采用 Chebyshev 配置点谱方法计算单管水击问题无论是最大水击压力还是水击压力波的衰减速率都能与特征线方法和有限单元法保持一致。

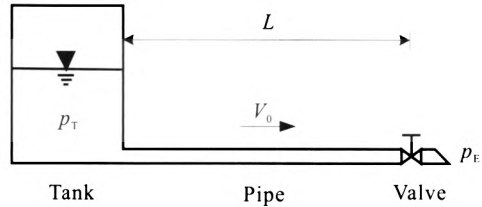


图 1 简单管路系统

Fig. 1 A single pipe system connecting valve and tank

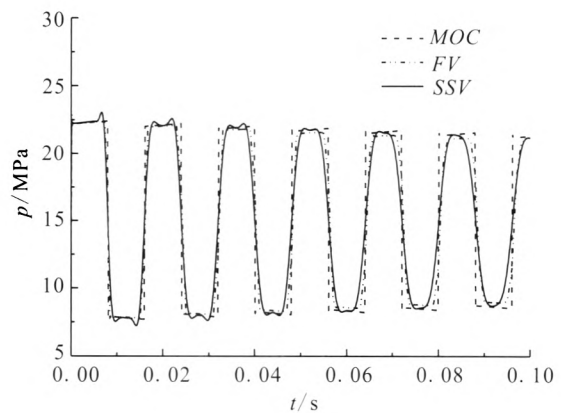


图 2 阀门瞬时关闭时压力波动计算结果

Fig. 2 Calculated result of pressure fluctuations as valve is instantaneously closed

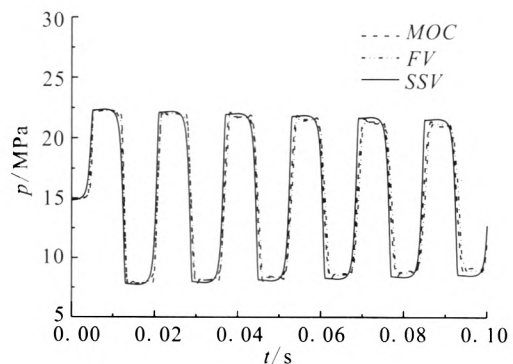


图 3 阀门按幂函数曲线关闭时压力波动计算结果

Fig. 3 Calculated result of pressure fluctuations as valve is closed in power function curve

图 4 给出了有无超谱粘性项计算结果的对比。由图 4 可知,若不引入超谱粘性,在管流实际振荡曲线上叠加一高频振荡,加入超谱粘性项后可有效抑制这一数值振荡。

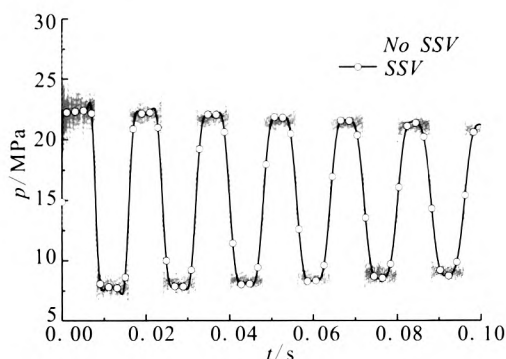


图 4 超谱粘性项对计算结果的影响

Fig. 4 Influence of super spectral viscosity term on calculation results

图 5 给出了 CGL 网格节点不同,利用 Chebyshev 配置点谱方法计算单管水击问题阀门处压力比较。从图 5 可以看出, CGL 网格节点对单管水击问题计算结果的影响主要体现在压力波的波形变化上,并无相位误差,增加网格节点数,精度越高。这是由于网格节点数越多,谱逼近的局部性越好。当网格节点 $N \geq 16$ 时, Chebyshev 配置点谱方法的计算精度已经可以满足要求,因此,仿真过程中可以选取较低的网格节点数,提高配置点谱方法的计算效率。

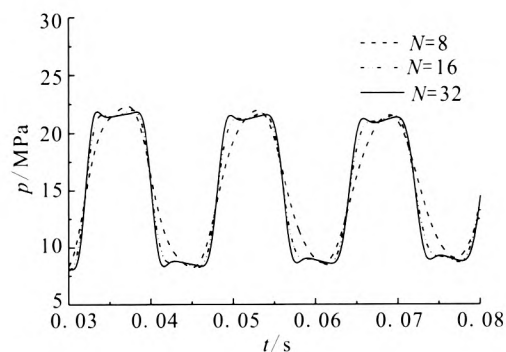


图 5 不同 CGL 网格节点数时管路末端压力变化

Fig. 5 Pressure variation at the end of pipe as CGL grid node number is different

图 6 给出了超谱粘性项中参数 s 对计算结果的影响, s 取 0.8 时,该高频振荡得到了一定的抑制; s 取 1.5 时,高频振荡得到了较好的抑制,进步增大参数 s 取值,将导致计算的水击压力振荡比实际衰减快, s 取值越大,衰减越快,而这种衰减是人为引起的。因此,超谱粘性项中参数的选取原则是:以能够较好抑制因数值振荡引起的高频振荡阻尼值为宜,文献 [20] 给出了粘性项参数的取值范围: $0 \leq C \leq N^{1/2}$, $s \leq \ln(N)$ 。

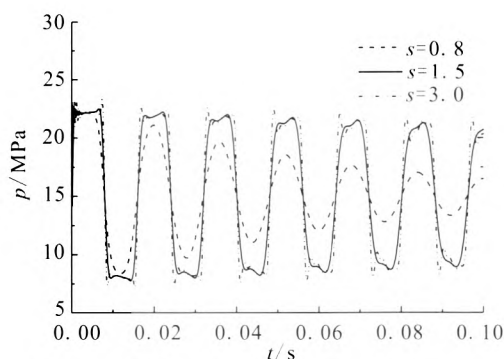


图 6 不同参数 s 取值时管路末端压力变化

Fig. 6 Pressure variation at the end of pipe as different parameter s is used

3 结论

推进剂供应系统管道内液体非定常流动的 Chebyshev 配置点谱方法求解结果表明:

1) 将谱方法中的 Chebyshev 配置点谱方法应用于单管水击这一强非线性问题计算时,求得结果与特征线法和分段集中参数有限单元法结果一致,表明方法和仿真结果可信。

2) 通过引入超谱粘性项,使传统配置点谱方法较好地抑制了数值解在间断处产生非物理的数值振荡。

3) 采用 Chebyshev 配置点谱方法分析推进剂供应系统管路内液体瞬变流分布参数模型时,边界处理简单,计算效率高,可以方便地连接集中参数元件,适用于复杂流体网络的模块化建模与仿真,对工程实际应用有广阔前景。

参考文献:

- [1] RUTH E K, AIM H, BAKER R L, et al. Advanced liquid rocket engine transient model, AIAA 90-2299 [R]. USA: AIAA, 1990.
- [2] HAGEN D, GERD K. Numerical simulation of transients in feed systems for cryogenic rocket engines, AIAA 95-2967[R]. USA: AIAA, 1995.
- [3] WYLIE E B, STREETER V L. Fluid transient in systems [M]. Endlewood Cliffs, USA: Prentice Hall, 1993.
- [4] 王克昌. 液体火箭发动机瞬变过程的计算机模拟[J]. 宇航学报, 1981, 2(1): 31-41.
- [5] 林西强, 程谋森, 刘昆, 等. 液路耦联多发动机系统开关机动态特性研究[J]. 推进技术, 1999, 20(4): 22-25.
- [6] 张黎辉, 李家文, 张雪梅, 等. 航天器推进系统发动机动态特性研究[J]. 航空动力学报, 2004, 19(4): 546-549.
- [7] 张育林, 刘昆, 程谋森. 液体火箭发动机动力学理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [8] KOLCIO K, HELMICKI A J, JAWOOD S. Propulsion system modeling for condition monitoring and control: part I ' theoretical foundation, AIAA 94-3227 [R]. USA: AIAA, 1994.
- [9] KOLCIO K, HELMICKI A J, JAWOOD S. Propulsion system modeling for condition monitoring and control: part II ' application to the SSME, AIAA 94-3228 [R]. USA: AIAA, 1994.
- [10] 程谋森, 刘昆, 张育林. 推进剂供应管路内液体瞬变流—维有限元计算[J]. 推进技术, 2000, 21(4): 12-15.
- [11] ONORATI A, PEROTTI M, and REBAY S. Modeling one-dimensional unsteady flows in ducts: symmetric finite difference schemes versus galerkin discontinuous finite element method[J]. International Journal of Mechanical Science, 1997, 39(11): 1213-1236.
- [12] SZYMKIEWICZ R, MITOSEK M. Analysis of unsteady pipe flow using the modified finite element mMethod[J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2005 (25): 183-199.
- [13] MAJUMDAR A. Numerical modeling of fluid transient by a finite volume procedure for rocket propulsion systems [C]// Proceedings of ASME FEDSM'03, 4th ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference. Honolulu, Hawaii, USA: [s.n.], 2003.
- [14] YAMANISHI N, KIMURA T, TAKAHASHI M, et al. Transient analysis of the LE-7A rocket engine using the rocket engine dynamic simulator (REDS), AIAA 2004-3850 [R]. USA: AIAA, 2004.
- [15] 刘昆, 张育林. 一维可压缩流的有限元状态空间模型[J]. 推进技术, 1999 (5): 62-66.
- [16] CANUTO C, QUARTERONI A. Approximation results for orthogonal polynomials in Sobolev spaces [J]. Math Compu, 1982, 38: 67-86.
- [17] GUO B Y. Spectral methods and absorbing boundary conditions for Maxwell's Equations[D]. Singapore: World Scientific, 1998.
- [18] HUANG W Z, SLOAN D M. The pseudo-spectral method for solving differential eigenvalue equations[J]. J. Comp Phys, 1994, 111: 399-409.
- [19] MA H P, Chebyshev-Legendre super spectral viscosity method for nonlinear conservation laws [J]. SIAM J. Numerical Anal, 1998, 35 (3): 893-908.
- [20] MA H P, LI H Y. Super spectral viscosity method for nonlinear conservation laws[J]. Journal of Shanghai University (English Edition), 2006, 10(1): 9-14.
- [21] SCOTT A S. Chebyshev super spectral viscosity method for a two-dimensional fluidized bed model[J]. Int. J. Numer. Meth. Fluids, 2002 (4): 1-18.
- [22] 陈宏玉, 刘红军, 刘上. 水击问题的 Fourier 谱方法计算 [J]. 火箭推进, 2012, 38(3): 7-11.
- [23] 刘昆, 张育林. 推进剂供应管道的集中参数近似模型研究—模态近似模型[J]. 推进技术, 1998, 19(4): 41-45.
- [24] 徐峰, 刘英元, 陈海峰. 火箭发动机水击压力数值模拟分析[J]. 火箭推进, 2012, 38(1): 72-75.
- [25] 张峥岳, 康乃全. 轨姿控液体火箭发动机水击仿真模拟[J]. 火箭推进, 2012, 38(3): 12-16.

(编辑: 马 杰)