

# 伪谱法在飞行器轨迹优化中应用分析

胡松启, 陈 雨

(西北工业大学 燃烧、热结构与内流场重点实验室, 陕西 西安 710072)

**摘 要:** 伪谱法作为一种在飞行器轨迹优化领域广泛应用的方法, 国内外缺乏对其进行综合研究分析的相关文献。介绍了伪谱法在飞行器轨迹优化领域的发展现状, 详细分析了已应用于飞行器轨迹优化的 4 种伪谱法的特点和应用情况, 总结了这 4 种方法优缺点: Legendre 伪谱法研究较早、应用最为广泛, Gauss 伪谱法和 Radau 伪谱法精度较高, 而 Chebyshev 伪谱法理论上精度高但研究刚起步。伪谱法具有全局特性, 计算精度高, 收敛快, 但也存在缺乏收敛解判定准则、难以处理非光滑问题等不足。介绍了伪谱法在处理 bang-bang 控制问题时所遇到的困难, 对伪谱法的改进工作做出总结: 改进算法, 研究与其他算法相结合的优化方法。总体而言, 伪谱法在轨迹优化问题上的应用前景很广。

**关键词:** 伪谱法; 飞行器; 轨迹优化

**中图分类号:** V412-34 **文献标识码:** A **文章编号:** 1672-9374 (2014) 05-0061-08

## Analysis of pseudospectral methods applied to aircraft trajectory optimization

HU Song-qi, CHEN Yu

(Key Laboratory of Combustion, Thermal Structure and Internal Flow Field,  
Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** The pseudospectral methods are widely used in the field of aircraft trajectory optimization. There is lack of relevant literatures about comprehensive research and analysis on the pseudospectral methods at home and abroad. The development status of the pseudospectral methods in the field of aircraft trajectory optimization is described in this paper. The characteristics, application situation, advantages and disadvantages of the four common pseudospectral methods are analyzed. They are Legendre pseudospectral method, Gauss pseudospectral method, Radau pseudo-spectral method and Chebyshev pseudospectral method. Difficulty in dealing with bang-bang control problems is introduced. The improvement about the pseudospectral methods are summarized. The algorithm was improved and some optimization methods combining with other algorithms were studied. Generally speaking, the pseudospectral methods have a wide application prospect in the

收稿日期: 2014-06-30; 修回日期: 2014-07-23

基金项目: 西北工业大学研究生种子基金(Z2014032)和航天支撑基金(NAXA0003)

作者简介: 胡松启 (1976—), 副教授, 主要从事固体推进剂及燃烧研究

trajectory optimization.

**Keywords:** pseudospectral method; air vehicle; trajectory optimization

## 0 引言

飞行器的轨迹优化问题在本质上是一类连续的动态最优控制问题。早期的研究都采用解析法推导轨迹最优解。该方法对于简单的线性系统比较有效,对复杂非线性系统就有些力不从心。因此,学者们逐渐把研究的焦点转向了数值解法。数值方法很多,一般分为间接法和直接法<sup>[1]</sup>。间接法存在收敛域小、难以估计协态变量初值等不足,且对于多路径约束,间接法的推导过程十分复杂。直接法避免了间接法在优化过程中遇到的求解两点边值问题,使得轨迹优化问题的求解更适用于数字计算机的特点,更易于实现。近些年来,直接法中的一类基于正交配置的伪谱法,由于其具有全局特性、高精度和高效率,在轨迹优化领域得到广泛应用。

伪谱方法源于早期求解流体力学问题的谱方法。伪谱法的基本原理是将最优控制问题转化为具有一系列代数约束的参数优化问题,即非线性规划问题(NLP)<sup>[2]</sup>。伪谱法在一系列配置点上离散状态变量和控制变量,并以这些离散点为节点构造全局插值多项式来逼近状态和控制变量。通过对全局插值多项式求导来近似状态变量对时间的导数,且在一系列配点上满足动力学方程函数约束,从而将微分方程约束转换为一组代数约束,这样最优控制问题就转化为NLP问题。伪谱法的最大优点在于可以利用相对较少的离散点得到极高精度近似解,随着插值阶次升高其误差将快速下降,精度要求不高情况下可以降低插值节点数进行求解,这也有效的减小了存储空间。

20世纪80年代,Chebyshev伪谱法最早被应用到最优控制问题<sup>[3]</sup>。随后,Legendre伪谱方法应用于地球-火星轨道转移模型研究<sup>[4]</sup>。在飞行器轨迹优化中,伪谱方法用于上升段、再入段、编队飞行和轨道转移等方面的最优控制问题。本文详细介绍伪谱法在飞行器轨迹优化方面的发展和

应用。

## 1 伪谱法在飞行器轨迹优化方面的应用

伪谱法在飞行器轨迹优化方面,应用较为广泛的伪谱法主要有4种<sup>[5]</sup>: Legendre伪谱法(LPM)、Gauss伪谱法(GPM)、Radau伪谱法(RPM)和Chebyshev伪谱法(CPM),其中Legendre伪谱法和Gauss伪谱法是最近发展最为迅速的优化方法。下文分别对这4种伪谱法的发展应用做详细的介绍。

### 1.1 Legendre伪谱法

Legendre伪谱法由Elnagar于1995年首次提出<sup>[4]</sup>。Legendre伪谱法使用全局正交Lagrange多项式,在选取的Legendre-Guass-Lobatto(LGL)配置点对状态变量和控制变量进行离散,将状态方程转化为非线性代数方程,利用成熟的非线性规划方法求解。这种方法可以提供指数函数的收敛速度<sup>[6]</sup>,对初值猜测不敏感,收敛半径大。

Elnagar等人提出采用Legendre伪谱法在LGL点处离散状态变量和控制变量,从而将最优控制问题转化为非线性规划问题<sup>[4]</sup>。基于Legendre伪谱法,对低推力运载火箭在地球火星轨道转移的最短时间问题进行优化,得到的结果与传统方法获得的轨迹相吻合,证明了该方法在处理最优控制问题上具有高效性和准确性。

对于Legendre伪谱法的完善,贡献较大的是Fahroo和Ross,他们提出了基于Legendre伪谱法的协态映射定理<sup>[7]</sup>。有效地估计了最优控制理论中的Bolza问题所遇到的协态变量,通过Legendre伪谱法将状态变量和控制变量在离散点的值作为最优参数,使最优控制问题转化为一个标准的NLP问题,证明了离散点处的协态变量等同于近似NLP问题中的Lagrange乘子,Legendre伪谱法近似估计协态变量与间接法得到结果一致。此外,Ross和Fahroo研究了Legendre伪谱法的

收敛性,通过 Legendre 伪谱法得到的 NLP 问题以谱速率 (spectral rate) 收敛到原来连续的 Bolza 问题<sup>[8]</sup>。

在应用方面,Rao 和 Clarke 基于 Legendre 伪谱法研究了再入飞行器的性能优化问题,给出了飞行器返回段的最优控制规律<sup>[9]</sup>。

Stanton 和 Proulx 基于 Legendre 伪谱法对有限推力的航天器轨道转移问题进行了研究<sup>[10]</sup>。建立了轨道转移最优控制问题模型,以燃料消耗最少优化目标,攻角为控制变量,轨迹夹角、飞行高度和速度为状态变量终端约束。仿真结果表明,Legendre 伪谱法对轨道转移的初始条件的不敏感,得到的最优解具有很好的鲁棒性。

Karpenko 等人将 Legendre 伪谱法应用于 NASA 太空望远镜 TRACE 的定向机动<sup>[11]</sup>。假设出基于 TRACE 动力模型和姿态控制系统的时间最短的定向机动优化问题,建立 TRACE 的飞行仿真模型。模拟结果和飞行试验数据对比表明,所设计的时间最短优化轨迹满足指定约束条件。张侃研究了 Legendre 伪谱法在高超声速飞行器滑翔轨迹优化问题中的应用<sup>[12]</sup>。提出利用 Legendre 伪谱法进行模型变换,结合遗传算法和 SQP 算法的串行组合优化策略寻优的求解思路,解决了滑翔轨迹中飞行器状态量变化剧烈致使优化过程收敛较慢的问题。仿真示例说明 Legendre 伪谱法能够处理轨迹优化问题,且优化精度较高,提出的混合优化策略效果明显,适用于高超声速飞行器的轨迹快速优化。

梅杰等人基于 Legendre 伪谱法研究了椭圆轨道下卫星相对轨道转移的燃料最优控制问题<sup>[13]</sup>。针对以真近点角为自变量的卫星相对运动动力学模型,给出了和真近点角相匹配的性能指标,利用 Legendre 伪谱法将最优控制问题转化为参数优化问题,以状态转移矩阵为基础,给出了仅以初末状态为约束的最优控制律。针对线性化模型,给出了以状态方程为约束的最优控制律。

Legendre 伪谱法以其高效率 and 实时计算能力在飞行器轨迹优化中得到了广泛应用,是研究较早、应用最为广泛的伪谱法之一,但是在计算精度上需要进一步提高。

## 1.2 Gauss 伪谱法

为了提高 Legendre 伪谱法的协态估计,2004 年,Benson 第一次提出了 Gauss 伪谱法<sup>[14]</sup>。Gauss 伪谱法,采用 Lagrange 全局正交插值多项式在一系列 Legendre-Gauss (LG) 配置点上近似状态变量和控制变量。与其他伪谱法相比,Gauss 伪谱法能够以较少的节点获得较高的求解精度,具有更快的收敛速度。

Benson 等人提出了 Gauss 伪谱法,比较突出的贡献就是证明得到高斯伪谱协态变量映射定理<sup>[14-15]</sup>。高斯伪谱法其他伪谱法不同之处在于动态约束不在边界点配置,这种配置和近似协态变量一起构成的一组 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件与一阶最优必要条件在 LG 点的离散化形式是一致的。Benson 就这种 KKT 条件和离散化的一阶必要条件的等价性进行了详细论证,使 NLP 的解满足传统间接法的一阶最优性必要条件,避免了一般直接法的缺点。

Huntington 和 Rao 基于 Gauss 伪谱法研究了宇宙飞船编队飞行的轨迹优化问题<sup>[16]</sup>。优化目标是确定飞船编队从停泊轨道转移到参考轨道最少燃料消耗的飞行轨迹。优化结果证明了 Gauss 伪谱法应用于编队飞行的适用性。

此外,Huntington 等人还对 Gauss 伪谱法求解最优控制问题提出了改进方案,将庞特里亚金最小值原理应用在边界点上,在起始点和终点更精确的近似控制变量<sup>[17]</sup>。在边界控制优化中,应用初始状态变量和协态变量,获取更高的精度。与采用外推法控制边界条件而言,显著提高了优化轨迹的精度,可以应用在实时优化控制中。

Divya Garg 等人将 Gauss 伪谱方法应用到非线性无限域最优控制问题<sup>[18]</sup>。证明了非线性规划的 KKT 条件与离散的无限域最优控制问题的一阶最优性条件具有一致性,应用 KKT 乘子向量映射可以准确得到协态变量。

雍恩米等人基于 Gauss 伪谱法求解高超声速无动力再入飞行器的快速轨迹优化问题<sup>[19]</sup>。提出了包括设计变量初值生成器、从可行解到最优解的串行优化以及将轨迹分段的优化的策略。仿真计算结果表明,在该优化策略下,应用 Gauss 伪

谱法可以快速有效地求解高超声速飞行器多约束条件下的再入最优轨迹。

姚寅伟和李华滨研究了基于 Gauss 伪谱法的临近空间高超声速飞行器三维再入轨迹的快速优化方法,采用“初值轨迹生成+Gauss 伪谱法+SQP 求解 NLP”的方法,在仿真过程中选取再入总吸热量最小为性能指标,求解了满足多种约束的再入轨迹,并将优化的结果与数值积分的结果进行比较,验证了此算法有效性和可行性<sup>[20]</sup>。

Gauss 伪谱法是针对 Legendre 伪谱法的不足改进得到,最重要的成果是证明了非线性规划的 KKT 条件与离散的最优控制问题的一阶最优性条件具有一致性。同时,和其他伪谱法相比,Gauss 伪谱法求解精度最高,发展很快,扩展了该方法在飞行器轨迹优化中的应用。

### 1.3 Radau 伪谱法

Radau 伪谱法的计算精度仅次于 Gauss 伪谱法,因其具有简单的结构、较高的精度和较快的收敛速度,以及在处理连续时间最优控制问题上的优势,得到了快速发展。

Fahroo 和 Ross 采用 Radau 伪谱法解决无限域非线性最优控制问题<sup>[21]</sup>。提出了基于 Legendre-Gauss-Radau (LGR) 配置点的协态变量映射定理,从而避免求解边界值问题。

Kameswaran 和 Biegler 对 Radau 伪谱法的收敛性进行研究,采用局部配点法将轨迹分段,在每个段上离散状态和控制变量,取每段的步长无限接近于零以实现收敛<sup>[22]</sup>。这种方法在某种意义上实现收敛,但不是“伪谱”意义上的实现。

Garg 和 Patterson 等人介绍了 Radau 伪谱法的基本理论,给出连续 Bolza 问题的一阶最优性条件,解决了最优控制问题的协态估计,使得非线性规划问题的 KKT 乘子向量可以较为精确的映射到最优控制问题的协态变量<sup>[23]</sup>。

Darby 等人结合 Radau 伪谱法和正交配点法生成一种新的可变阶自适应伪谱控制算法,来处理最优控制问题<sup>[24]</sup>。自适应算法对于非光滑问题细化网格,对于光滑问题提高网格点上的多项式逼近程度,提高解的收敛性。以可重复使用飞行器返回段的水平位移优化为例,发现自适应伪谱

法比任何一个全局伪谱法效率高。

王铀等人针对无人作战飞机 (UCAV) 对地攻击轨迹规划问题,提出一种基于 Radau 伪谱法的求解策略<sup>[25]</sup>。建立了 UCAV 三自由度质点模型,利用 Radau 伪谱法对 UCAV 对地攻击轨迹规划问题进行仿真。仿真结果表明,该方法能以较高的精度和速度生成满足各种复杂约束要求、连续并且真实可行的最优轨迹。

Legendre 伪谱法、Gauss 伪谱法和 Radau 伪谱法都是基于 Lagrange 多项式实现正交配置,3 种方法之间的区别主要在于离散点和配置点的选择。3 种方法在收敛效率上基本一致,Gauss 伪谱法和 Radau 伪谱法在计算精度上相似,明显优于 Legendre 伪谱法<sup>[26]</sup>。

### 1.4 Chebyshev 伪谱法

1988 年,Chebyshev 伪谱法由 Vlassenbroeck 和 Dooren 引入解决非线性最优控制问题<sup>[3]</sup>,是各种伪谱法里应用最早的。

Chebyshev 伪谱法具有很高的精度。主要原因是,在 Chebyshev-Gauss-Lobatto (CLG) 配置点处展开的离散插值多项式在最大范数形式上更加逼近目标函数多项式,可以通过一个微分矩阵精确得到这些多项式的导数。相比 Legendre 和 Gauss 伪谱法,虽然 Chebyshev 伪谱法具有独特的计算优势,但由于未能给出近似协态变量的映射定理,缺乏验证最优解的有效手段,Chebyshev 伪谱法在最优控制问题上应用不够<sup>[27]</sup>。

正因为如此,Chebyshev 伪谱法在飞行器轨迹优化中的应用研究较少。

Fahroo 和 Ross 等利用 Chebyshev 伪谱法直接求解有状态和控制约束的 Bolza 优化控制问题<sup>[28]</sup>。改进微分矩阵,且以状态和控制变量在 CGL 点处的值作为非线性参数,有效解决了非线性问题的求解。通过登月舱着陆轨迹优化等例子证明 Chebyshev 伪谱法能够得到比数值积分更精确的结果。

Mihaila 用一系列 Chebyshev 多项式来近似未知的函数而获得了偏微分方程的数值解<sup>[29]</sup>。并指出相对于其他数值方法,Chebyshev 伪谱法具有更快的收敛速度和更高的精度。

Elnagar 和 Kazemi 在 CLG 节点采用“细胞-平均”方法把最优控制问题离散化为非线性规划问题<sup>[30]</sup>。对于不连续最优控制问题, 提供了分段处理不光滑性的解决方案。数值实例分析, 验证了该方法的收敛性。

万繁良建立了卫星编队相对运动、卫星编队构形调整最优控制及摄动因素下 Lambert 问题的 Hamilton 力学模型, 利用 Chebyshev 伪谱法分别对这些问题进行了求解<sup>[31]</sup>。并通过算例验证了 Chebyshev 伪谱法能够得到高精度解。

2010 年, Gong Qi 等人解决了 Chebyshev 伪谱法中的协态变量估计这一长期存在的问题<sup>[27]</sup>。利用一个不同于离散状态变量的微分矩阵, 降低权重函数计算的难度, 通过协态映射准则近似协态变量, 为 Chebyshev 伪谱法进一步的研究奠定了理论基础。

Chebyshev 伪谱法最早, 但研究相对不足, 近些年来在飞行器轨迹优化领域的应用很少。相比于上述介绍的 3 种伪谱法, Chebyshev 伪谱法的最大优势在于计算精度, 对于最优解的数值近似程度很高。随着协态变量映射定理的给出, 考虑到 Chebyshev 伪谱法的计算优势, 其应用发展空间很大。

可见, 4 种伪谱法在选取配点和离散插值多项式上略有不同, 致使计算精度和收敛速度也不一样。此 4 种伪谱法共同的特点是利用具有全局特性的插值多项式来逼近状态和控制变量, 这种全局特性用于求光滑轨迹优化问题具有很好的精度和效率, 在轨迹优化领域得到了广泛的研究和应用。但是对于 bang-bang 控制问题, 伪谱法的计算效率较低, 精度和效率很难保证, 很难得到全局收敛最优解。

## 2 伪谱法在处理 bang-bang 问题时存在的困难

一般伪谱法在处理 bang-bang 控制问题时存在固有的困难。对于航天工程中广泛存在的燃料最优轨迹设计问题 (bang-bang 控制问题), 捕捉局部特征, 伪谱法很难保证其精度和效率<sup>[32]</sup>。伪谱法求解 bang-bang 控制的困难还有一个诱因<sup>[33]</sup>:

在伪谱法中, 离散网格点不是均匀的, 它们通常具有边界处稠密而内部稀疏的特征, 由于加密的网格主要落在了边界处, 网格加密的方法对于提高间断捕捉性能的效率也不高。

为了有效处理 bang-bang 控制所带来的困难, 基于全局多项式的伪谱法不得不放弃“全局近似”而转回“局部近似”。这实际上是目前伪谱法解决 bang-bang 控制问题的主要思路: 不同于全局配点法在整个时间段里进行插值近似, 局部配点法是将整个时间段分割成多个子区间, 再在每个子区间上分别选取一定数目的插值点, 每相邻两个子区间受状态变量、独立变量和控制变量的连续性条件约束。国内外在处理 bang-bang 最优控制问题上进行了大量研究, 多集中在对于特定不连续轨迹优化问题的改进方面:

Rao 和 Ross 基于 Legendre 伪谱法把连续 (时间) 的最优控制问题转化为不连续多阶段的最优控制问题<sup>[34-35]</sup>。每个阶段的状态参数、控制和约束条件不尽相同, 但状态、控制变量以及自变量相互联系。在各个阶段上分别采用 Legendre 伪谱法离散化处理, 保证了 NLP 问题的结构稳定性, 提供了多阶段最优控制问题的一般解法。

宣颖等人基于 Legendre 法则的“结点”伪谱法处理不连续问题<sup>[36]</sup>, 可以把一个无限维的动态最优控制问题转化为有限维的静态优化问题<sup>[36]</sup>。以三级固体运载火箭轨迹优化为例, 在惯性直角坐标系中建立动力学模型, 将火箭的飞行过程分处理。算例结果验证了该算法在飞行弹道时间和精度优化上的正确性和有效性。

杨希祥和张为华研究 Gauss 伪谱法在多级固体运载火箭上升段轨迹快速优化设计中的应用<sup>[37]</sup>。针对多级固体运载火箭上升段轨迹优化的特点, 研究求解多阶段不连续最优控制问题的 Gauss 伪谱法, 引入连接点概念处理间断点, 设计了边界控制变量计算方法。为进一步提高轨迹优化速度, 设计了含初值生成器的 Gauss 伪谱法串行轨迹优化策略, 实现了固体运载火箭上升段轨迹快速优化。仿真结果表明, 优化轨迹在终端约束和路径约束均得到很好满足, 算法求解精度高, 对初值依赖性小, 设计的边界控制变量计算方法可行。

王立峰和汪洋等给出了 Chebyshev 局部配点法的应用提供理论基础,研究了 Chebyshev 局部配点法收敛性和稳定性<sup>[38]</sup>。以 Hyper-sensitive 问题和 Minimum-energy 问题为例,结果表明, Chebyshev 局部配点法是可行有效,相比于传统的插值法精度更高、计算速度更快,和经典 Chebyshev 伪谱法相比也略有优势。

伪谱法求解 bang-bang 控制问题所遇到的不“光滑”性困难源于其理论基础:全局近似。解决这一困难还有两方面的问题需要处理:1) bang-bang 控制的切换时间序列需要高效、准确地确定,这给算法实施带来了复杂性同时也将降低计算效率;2) 由“全局”转回“局部”将会导致伪谱法原有优势的丧失,计算效率明显降低<sup>[39]</sup>。

### 3 伪谱法在轨迹优化方面应用展望

伪谱法虽然已经实际应用在飞行器轨迹优化中,达到了预期的目的,但是依然存在一些不足和需要改进之处:

1) 进一步降低对初值的敏感性,提高实时性要求。在解决非线性规划问题上,伪谱法由于计算量小,具有较快计算速度,因此可以在实时性上进一步提高。伪谱法对初始值比较敏感,对于任意初始值收敛到全局最优解难度很大,对于伪谱法的研究要着重于降低初始值的敏感性,大幅度提升整体计算时间,以便更贴近于实时应用。

2) 建立全局最优解判断准则。伪谱法轨迹优化的高精度只是建立在和其他方法对比基础上,因此需要对伪谱法得到的结果进行最优性验证,建立伪谱法全局最优解判断准则,从理论上对伪谱法的最优解做出定性分析。

3) 改进离散多项式,提高精度。伪谱法是基于离散的直接数值法,采用拟合正交多项式近似状态变量和控制变量,这势必存在一定的理论误差,对最优轨迹的精度有影响,今后可以继续开展新的模型变换方法的理论研究,优化配置点的选取、改进离散多项式,使数值解的精度更接近于真实解。

4) 可以开展直接法和其他算法相结合的优化方法,如遗传算法、粒子群算法等,不依赖于

初值的选取,满足快速优化的要求;与同伦技术结合,避免 bang-bang 控制所带来的不光滑性困难。以此提高伪谱法的应用范围。

迄今为止,伪谱方法已广泛应用于解决无人机航迹规划、导弹制导、航天器轨道机动和入轨飞行器上升段制导等大量的最优控制问题,成为目前解决最优控制和轨迹最优化问题最有效的工具之一。

国际空间站在 2006 年执行了一次大规模的姿态调整。与以往不同的是,这次被称为“零推进剂机动”的任务基于伪谱最优控制理论进行了预先的轨迹优化<sup>[40]</sup>,这是伪谱方法首次获得大规模的实际应用。伪谱方法不仅使 NASA 节省了 150 万美元的推进剂费用,而且实现了原本用现有国际空间站控制算法不能完成的任务。此外,在 2010 年, NASA 再次采用伪谱控制理论开展对太空望远镜 TRACE 定向机动试验研究,不同于“零推进剂机动”的最小燃油消耗,此次任务的目标是实现时间最优的大角度轨道机动,试验结果取得一定的成功,验证了伪谱法可以应用提高飞行器的在轨机动性能<sup>[41]</sup>。NASA 的试验研究拓展了伪谱法的发展方向,随着算法的不断优化改进,在飞行器轨迹优化领域,将会实现更多的伪谱算法应用实践,提高轨迹优化的效率和精度。

### 4 结束语

本文较详细的介绍了伪谱法飞行器轨迹优化领域的发展现状,总结了伪谱法在应用过程中存在的一些问题和不足。随着伪谱法研究的不断深入,在实际工程领域将会得到更大的发展和应用。

#### 参考文献:

- [1] BETTS J T. Survey numerical methods for trajectory optimization [J]. AIAA Journal of Guidance Control and Dynamics, 1998, 21(2): 193-207.
- [2] BETTS J T. Practical methods for optimal control using nonlinear programming [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.
- [3] VLASSEN BROECK J, DOOREN R V. A Chebyshev

- technique for solving nonlinear optimal problems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1988, 33(4): 333-340.
- [4] ELNAGAR J, KAZEMI M A, RAZZAGHI M. The pseudospectral Legendre method for discretizing optimal control problems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1995, 40(10): 1793-1796.
- [5] 雍恩米, 陈磊, 唐国金. 飞行器轨迹优化数值方法综述[J]. 宇航学报, 2008, 29(2): 398-406.
- [6] TREFETHEN L N. Spectral methods in MATLAB[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [7] FAHROO F, ROSS M I. Costate estimation by a Legendre pseudospectral method[J]. AIAA Journal of Guidance Control and Dynamics, 2001, 24(2): 270-277.
- [8] ROSS M I, FAHROO F. Convergence of pseudospectral discretizations of optimal control problems[C]// IEEE Conference on Decision and Control. [S.l.]: IEEE, 2001: 3175-3177.
- [9] RAO A V, CLARKE K A. Performance optimization of a maneuvering reentry vehicle using a Legendre pseudospectral method[C]// AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference. Monterey: AIAA, 2002: 111-121.
- [10] STANTON S, PROULX R. Optimal orbital transfer using a Legendre pseudospectral method[C]// AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference. Montana: AIAA, 2003: 222-232.
- [11] KARPENKO M, BHATT S, BEDROSSIAN N, et al. Flight implementation of pseudospectral optimal control for the TRACE space telescope[C]// AIAA Guidance Navigation and Control Conference. Oregon, Portland: AIAA, 2011: 11-18.
- [12] 张侃. 基于多任务多目标的空天飞行器轨迹设计及优化研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2010.
- [13] 梅杰, 马广富, 杨博. 基于 Legendre 伪谱法的卫星轨道转移燃料最优控制[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2010, 42(3): 352-357.
- [14] BENSON D. A gauss pseudospectral transcription for optimal control[D]. Massachusetts, USA: Massachusetts Institute of Technology, 2004.
- [15] BENSON A, THORVALDSEN T, RAO V. Direct trajectory optimization and costate estimation via an orthogonal collocation method [J]. IEEE Journal of Guidance Control and Dynamics, 2006, 29(6): 1435-1440.
- [16] HUNTINGTON G T, RAO A V. Optimal reconfiguration of spacecraft formation using the Gauss pseudospectral method[J]. AIAA Journal of Guidance Control and Dynamics, 2008, 31(3): 689-698.
- [17] HUNTINGTON G T, GEOFFREY T, BESON D A, et al. Computation of boundary controls using a gauss pseudospectral method[J]. Advances in the Astronautical Sciences, 2007, 129(3): 2049-2067.
- [18] GARG D, WILLIAM W H, RAO A V. Gauss pseudospectral method for solving infinite-horizon optimal control problems [C]// AIAA Guidance Navigation Control Conference. Toronto, Ontario, Canada: AIAA, 2010: 1011-1020.
- [19] 雍恩米, 唐国金, 陈磊. 基于 Gauss 伪谱方法的高超声速飞行器再入轨迹快速优化[J]. 宇航学报, 2008, 29(6): 1766-1772.
- [20] 姚寅伟, 李华滨. 基于 Gauss 伪谱法的高超声速飞行器多约束三维再入轨迹优化[J]. 航天控制, 2012, 30(2): 33-38.
- [21] FAHROO F, ROSS I. Pseudospectral methods for infinite horizon nonlinear optimal control problem[C]// AIAA Guidance Navigation and Control Conference. San Francisco: AIAA, 2005: 595-599.
- [22] KAMESWARAN S, BIEGLER L T. Convergence rates for direct transcription of optimal control problems at Radau points [C]// Proceedings of the 2006 American Control Conference. Minneapolis, Minnesota: [s.n.], 2006: 121-128.
- [23] GARG D, PATTERSON M A, DARBY C L, et al. Direct trajectory optimization and costate estimation of general optimal control problems using a Radau pseudospectral method[C]// AIAA Guidance Navigation and Control Conference. Chicago, Illinois: AIAA, 2009: 40-50.
- [24] GARG D, MICHAEL A. Direct trajectory optimization and costate estimation of finite-horizon and infinite-horizon optimal control problems using a Radau pseudospectral method[J]. Computational Optimization and Applications, 2011, 49(2): 335-358.
- [25] 王铀, 赵辉, 惠百斌, 等. 利用 Radau 伪谱法求解 UCAV 对地攻击轨迹研究[J]. 电光与控制, 2012, 19(10): 50-53.
- [26] HUNTINGTON G T. Advancement and analysis of a Gauss pseudospectral transcription for optimal control problems[D]. Massachusetts, USA: Massachusetts Insti-

- tiute of Technology, 2007.
- [27] GONG Q, ROSS I M, FAHROO F. Costate computation by a Chebyshev pseudospectral method [J]. AIAA Journal of Guidance Control and Dynamics, 2010, 33 (2): 623-628.
- [28] FAHROO F, ROSS I M. Direct trajectory optimization by a Chebyshev pseudospectral method[J]. AIAA Journal of Guidance Control and Dynamics, 2002, 25(1): 160-166.
- [29] MIHAILA B, MIHAILA I. Numerical approximation using Chebyshev polynomial expansions[J]. Journal of Physics A-mathematical and General, 2002, 35 (9): 731-746.
- [30] ELNAGAR G N, KAZEMI M A. Pseudospectral Chebyshev optimal control of constrained nonlinear dynamical systems[J]. Computational Optimization and Applications, 1998, 11(2): 195-217.
- [31] 万翻良. 航天动力学问题的伪谱迭代求解研究[D]. 长沙: 国防科技大学, 2011.
- [32] Hesthaven J, Gottlieb S, Gottlieb D. Spectral methods for time-dependent problems [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- [33] 郭铁丁. 深空探测小推力轨迹优化的间接法与伪谱法研究[D]. 北京: 清华大学, 2012.
- [34] RAO A V. Extension of a pseudospectral Legendre method to nonsequential multiple-phase optimal control problems [C]// AIAA Guidance Navigation and Control Conference and Exhibit. Austin, Texas: AIAA, 2003: 141-149.
- [35] ROSS I M, FAHROO F. Pseudospectral knotting methods for solving optimal control problem[J]. Journal of Guidance Control and Dynamics, 2004, 27(3): 397-405.
- [36] 宣颖, 张为华, 张育林. 基于 Legendre 伪谱法的固体运载火箭轨迹优化研究[J]. 固体技术, 2008, 31(5): 425-429.
- [37] 杨希祥, 张为华. 基于 Gauss 伪谱法的固体运载火箭上升段轨迹快速优化研究[J]. 宇航学报, 2011, 32(1): 15-21.
- [38] 王立峰, 汪洋, 赵晨, 等. Chebyshev 局部配点法在轨迹优化中的应用[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2013, 45(5): 95-100.
- [39] HUNTINGTON G T, RAO A V. A comparison between global and local orthogonal collocation methods for solving optimal control problems [C]// Proceedings of IEEE 2007 American Control Conference. New York, 2007: 1950-1957.
- [40] BEDROSSIAN N, BHATT S. First ever flight demonstration of zero propellant maneuver attitude control concept [C]// AIAA Guidance Navigation and Control Conference and Exhibit. Hilton Head, South Carolina: AIAA, 2007: 123-131.

(编辑: 马 杰)