

小样本下煤油加注温升模型参数估计方法

刘巾杰, 许琪琪, 扶山川, 窦天恒
(西昌卫星发射中心, 海南 文昌 571300)

摘要:为消除火箭煤油加注实测温度与现行加注温升模型计算理论温度之间的偏差, 准确估计煤油加注温升实现精确加注、精准控制, 在靶场实测数据仅为小样本数据的现实条件下, 采用贝叶斯回归方法, 将经验参数作为先验信息给出待估参数的先验分布, 由实测数据计算贝叶斯风险, 通过最小化风险函数实现对煤油加注温升模型的参数优化估计。数值实验结果表明, 与给定的经验参数和经典最小二乘估计参数相比, 贝叶斯估计参数估算的加注结束温度与实测温度误差显著减小, 且随着可用的数据样本容量相应增大, 贝叶斯回归分析的参数估计精度呈现收敛趋势。贝叶斯方法进行煤油加注温升模型参数估计有效提高了加注温升模型精度, 为提高推进剂加注精确度提供了方法基础。

关键词:小样本; 煤油温升; 参数估计; 贝叶斯回归

中图分类号:V511 **文献标识码:**A **文章编号:**1672-9374(2019)06-0090-05

Estimation method for coefficient of kerosene filling temperature rise model under small sample

LIU Jinjie, XU Qiqi, FU Shanchuan, DOU Tianheng
(Xichang Satellite Launch Center, Wenchang 571300, China)

Abstract: In order to eliminate the deviation between the actual rocket's kerosene filling temperature and the theoretical result calculated by current filling temperature rise model, and estimate kerosene temperature for accurate injection and precise control, Bayesian regression method was proposed to estimate fluctuation coefficient of the temperature rise model based on a very few sample data at launching site. It takes the empirical parameters as the prior information to give a distribution of parameters to be estimated, and uses real data to calculate Bayesian risk. The parameters of the filling temperature rise model were optimized by minimizing the risk function. Numerical results show that, compared with the given experience parameters and least square results, the kerosene temperature calculated by Bayes regression is much closer to the actual result. With the increase of available data sample capacity, the parameter estimation accuracy of Bayesian regression tends to converge. Bayesian regression can improve the precision of filling temperature rise model efficiently, and provides a foundation to improve the accuracy of propellant filling.

Keywords: small sample; kerosene temperature; coefficient estimation; Bayes regression

收稿日期: 2018-07-23; 修回日期: 2018-12-16

作者简介: 刘巾杰(1989—), 女, 硕士, 工程师, 研究领域为液体火箭靶场数据处理

0 引言

煤油作为目前液体火箭的主要推进剂之一,其温度波动会引起物性参数变化,对火箭发动机的性能产生影响。煤油加注系统是大推力运载火箭动力系统的重要组成部分,其主要功能是连续、可靠、准确地向箭上贮箱加注煤油^[1]。在加注过程中,受到环境温度、加注管路、加注泵工作状态等因素的影响,煤油温度会发生显著变化^[2-3]。因此,需要对煤油初始温度进行调整,控制煤油进箭温度。

采用准确的温升参数,建立科学的温升模型,才能对煤油温升过程进行精确模拟,进而根据最终温度要求反算出最优的煤油初始温度^[2]。目前靶场采用的温升参数,皆为确定的经验参数。然而以往试验任务与新型运载火箭靶场实际加注设备、停放环境等差别较大,若仍然使用经验参数进行计算,会致使计算温度与煤油经过加注温升后的实际温度之间存在不可忽略的相对误差。因此有必要根据靶场实测温度数据,对煤油加注温升参数进行估计。目前,我国靶场进行液体火箭飞行试验的次数极少,如何利用仅有的几次实测数据样本,设计更为有效的估计方法,对温升参数进行估计,使煤油温度更好地满足发动机工作要求,对提升火箭发动机整体性能有着重要意义。

1 加注温升模型

常温煤油主要采用泵压式加注^[1]。加注温升是指加注结束时火箭贮箱中的煤油温度(不考虑温度分层)与加注前库区储罐中煤油温度之差,其计算模型为

$$T_j = T_k + f_1(T_a - T_k) + f_0 + \varepsilon \quad (1)$$

式中: T_j 为煤油加注结束时温度; T_k 为煤油库房储罐内温度; f_1 为加注温变系数; T_a 为煤油加注开始时刻、结束时刻环境温度的平均值; f_0 为加注泵温升; ε 为测量误差。

在实际煤油加注前,根据目标温度,依照给定的加注模型,对初始加注温度进行反算。而正式加注时,是给定初始加注温度的情况下,煤油从储罐加注到火箭贮箱的过程中,由于加注泵加压、环境热交换等多种原因,温度自然升高,获得加注最终温度。事实上,加注温升模型,就是对煤油在加注

过程中温度升高过程的一种模拟。对同一个温升模型,从同一个初始温度出发,其温升参数越精确,解算出来的加注结束温度就与实际的加注结束温度最接近。图1为A、B两次任务加注温度数据。其中,A任务数据最大相对误差达到1.099 5℃,B任务数据最大相对误差达到4.557 9℃,均超出了煤油温度计算要求精度(要求为±1℃)。

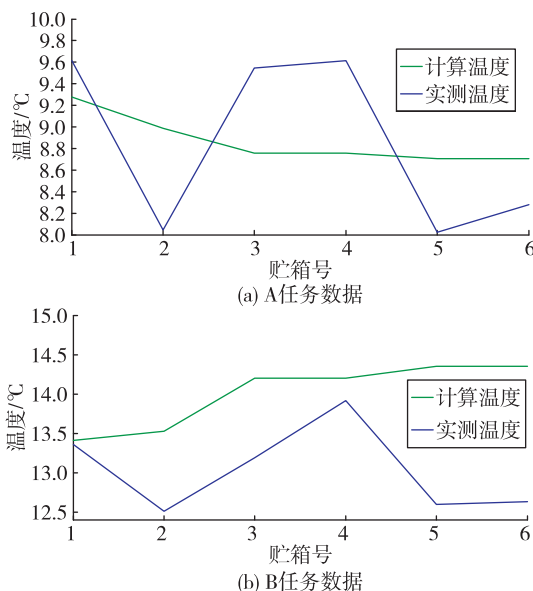


图1 两次任务加注温度数据

Fig. 1 Filling temperature of two tests

不妨假设式(1)所示的模型是正确而完备的,其中 T_j, T_k, T_a 可以通过实测获得,可见造成计算结果相对误差的根本在于使用的经验参数 f_1, f_0 不够准确。

2 温升模型的贝叶斯回归分析

将煤油从储罐加注到火箭不同的贮箱中,每个贮箱得到 T_j 的一次测量,不妨设 T_j^i 为 i 贮箱中贮箱煤油加注结束时的温度($i = 1, 2, \dots, m$, 其中 m 为火箭的贮箱数)。设

$$y_i = T_j^i - T_k$$

$$x_i = T_a - T_k$$

令

$$\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta} = [f_1, f_0]^T$$

将式(1)进一步写成

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2)$$

由式(2)可见,这是一个一元回归模型^[4]。

采用最小二乘求解,有^[5]

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y} \quad (3)$$

在以往试验任务中多次测试的情况下,可以得到足够的 \mathbf{X}, \mathbf{Y} 数据,用以解算 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}$ 。只要 \mathbf{X}, \mathbf{Y} 的有效数据足够多,那么就可以得到 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}$ 的精确估计^[6-7]。然而,如前文所述,以往试验任务与当前新一代运载火箭靶场实际加注情境不完全一致,所以根据以往数据估计的 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}$ 再精确,也可能与靶场中真实的 $\boldsymbol{\beta}$ 存在差异。而基于目前仅有的少量靶场实测数据样本对 $\boldsymbol{\beta}$ 进行最小二乘估计,会因为测量误差 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的存在,使得 $\boldsymbol{\beta}$ 的估计结果受测量数据不确定性影响较大,从而与真实的 $\boldsymbol{\beta}$ 偏差较大^[8]。

小样本条件下,贝叶斯法进行回归分析是一种较好的估计方法^[9-13]。贝叶斯方法通过将估计参数的先验信息加入回归分析中,能够有效降低测量误差对参数估计的影响,使小样本条件下仍然可以得到参数的合理估计^[14-15]。

不妨假设测量的随机误差 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是一个高斯白噪声,式(2)中有: $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$, $\text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2\mathbf{I}_m$ 。并且有先验分布: $\boldsymbol{\beta} \sim N(E(\boldsymbol{\beta}), \sigma^2\mathbf{I}_2)$, 其中 $E(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\mu}$, ($\boldsymbol{\mu}$ 为已知超参数)。在煤油加注温升模型中, $\boldsymbol{\mu}$ 为给定的经验参数:加注温变系数 f_1 和加注泵温升 f_0 , 记为 $\boldsymbol{\mu} = [f_1, f_0]^T$ 。

在式(2)所示的回归模型中参数的最小风险贝叶斯线性无偏估计(简称MRBLUE)定义如下^[8]:

设 $R(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\beta})$ 为估计量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 的贝叶斯风险,在参数向量 $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{b}$ 的线性估计类中,称线性估计 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_B$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 的最小风险贝叶斯线性无偏估计(MRBLUE),如果满足约束条件

$$E(\hat{\boldsymbol{\beta}}_B - \boldsymbol{\beta}) = 0$$

$$R(\hat{\boldsymbol{\beta}}_B, \boldsymbol{\beta}) = \min_{A, b} R(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\beta})$$

其中

$$R(\hat{\boldsymbol{\beta}}_B, \boldsymbol{\beta}) = \min_{A, b} R(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\beta}) = \min_{A, b} E[(\hat{\boldsymbol{\beta}}_B - \boldsymbol{\beta})^T D(\hat{\boldsymbol{\beta}}_B - \boldsymbol{\beta})] \quad (4)$$

式中: $R(\hat{\boldsymbol{\beta}}_B, \boldsymbol{\beta})$ 为 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_B$ 的风险函数,由此约束条件得

$$\mathbf{b} = (\mathbf{I}_m - \mathbf{A}\mathbf{X})\boldsymbol{\mu} \quad (5)$$

计算贝叶斯风险

$$R(\hat{\boldsymbol{\beta}}_B, \boldsymbol{\beta}) =$$

$$E[A(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\mu}) - (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu})]^T D[A(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\mu}) - (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu})] = \\ E\text{tr}\{D[A(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\mu}) - (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu})][A(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\mu}) - (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\mu})]^T\} = \\ \sigma^2 \text{tr}\{D\mathbf{A}(\mathbf{I}_m + \mathbf{X}\mathbf{X}^T)\mathbf{A}^T + D\mathbf{A}\mathbf{X} - D\mathbf{X}^T\mathbf{A}^T\}$$

令 $\partial R(\hat{\boldsymbol{\beta}}_B, \boldsymbol{\beta})/\partial \mathbf{A} = 0$, 由矩阵微商法则, 得到 $D\mathbf{A}(\mathbf{I}_m + \mathbf{X}\mathbf{X}^T) - D\mathbf{X}^T = 0$, 再利用代数事实 $(\mathbf{P} + \mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{B}^T)^{-1} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{B}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{C}^{-1})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}^{-1}$ 即

$$\mathbf{A} = (\mathbf{X}\mathbf{X}^T + \mathbf{I}_m)^{-1}\mathbf{X}^T \quad (6)$$

所以 $\boldsymbol{\beta}$ 的最小风险贝叶斯线性无偏估计为

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_B = (\mathbf{X}^T\mathbf{X} + \mathbf{I}_2^{-1})^{-1}(\mathbf{X}^T\mathbf{Y} + \mathbf{I}_2^{-1}\boldsymbol{\mu}) \quad (7)$$

对上式进行进一步梳理,有

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_B = (\mathbf{X}^T\mathbf{X} + \mathbf{I}_2^{-1})^{-1}(\mathbf{X}^T\mathbf{Y} + \mathbf{I}_2^{-1}\boldsymbol{\mu}) = \\ (\mathbf{X}^T\mathbf{X} + \mathbf{I}_2^{-1})^{-1}(\mathbf{X}^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} + \mathbf{I}_2^{-1}\boldsymbol{\mu}) = \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} - (\mathbf{X}^T\mathbf{X} + \mathbf{I}_2)^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} - \boldsymbol{\mu}) \quad (8)$$

如前文所述,若存在足够多的测试数据 \mathbf{X}, \mathbf{Y} 用以解算 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}$, 可以得到 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}$ 的精确估计。而经验参数 $\boldsymbol{\mu}$ 也是从多次测试中总结提炼出来的,可以认为 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}$ 是 $\boldsymbol{\mu}$ 的无偏估计。那么式(8)可以进一步写为

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_B = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} = \boldsymbol{\mu} \quad (9)$$

而正是因为小样本情况下,根据实测数据估计的 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}$ 受测量误差影响较大,无法得出精确估计,以往任务得到的经验参数 $\boldsymbol{\mu}$ 亦无法完全描述新的温升过程,所以才需要采用贝叶斯回归的方法,综合经验参数与实测数据,得到更加准确的估计参数。可以证明,在均方误差矩阵准则下,回归系数的最小风险贝叶斯线性无偏估计优于最小二乘估计^[9]。

3 加注温升参数估计

采用某型液体火箭飞行试验任务A中靶场加注温度数据作为参数估计的基础,分别使用前文所述的贝叶斯回归、最小二乘方法,根据煤油加注初始温度和加注结束时的贮箱煤油温度,结合加注当天的气象数据,得到 $\boldsymbol{\beta}$ 的两个估计值 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}, \hat{\boldsymbol{\beta}}_B$ 。联合经验参数 $\boldsymbol{\mu}$, 以煤油加注初始温度为初值,可以通过温升模型解算出最终的加注结束温度,将三者算出的加注结束温度与实测温度比较,得到结果如图2所示。

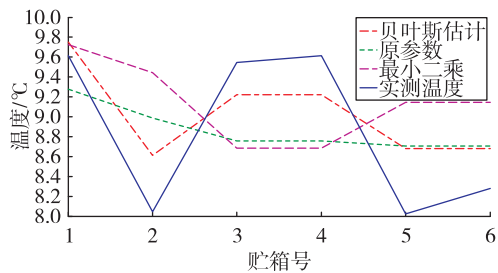


图 2 基于 A 试验任务数据的加注温度对比

Fig. 2 Comparison of filling temperature based on test A

3 种方法测得的参数中,由贝叶斯回归参数得到的加注结束温度与实测温度最为相近。进一步计算 3 种方法得到的加注结束温度与实测温度的误差,如表 1 所示。

表 1 基于 A 样本数据的误差对比			
Tab.1 Comparison of error based A test			
参数	贝叶斯	最小二乘	经验参数
最大相对误差/℃	0.654 5	0.942 2	1.099 5
最小相对误差/℃	0.112 6	0.135 6	0.338 2
均方误差	1.089 6	1.733 8	2.362 8

经过贝叶斯回归估计参数后得到的加注结束温度与实测温度最为吻合,相对经验参数的结果改善了 53.89%。最小二乘方法与经验参数结果相似,但最小二乘方法受测量误差影响,估算得到的加注泵温升 $f_0 = -6.579\ 9 < 0$,与实际情况不符,可见小样本条件下最小二乘方法并不适用。

将从此次加注过程中计算得到的贝叶斯回归参数用于该型火箭飞行试验任务 B 的加注过程,使用煤油初始加注温度计算得到加注结束温度,联合使用实验测定参数算出的结果与实测温度进行比较,结果如图 3 所示。

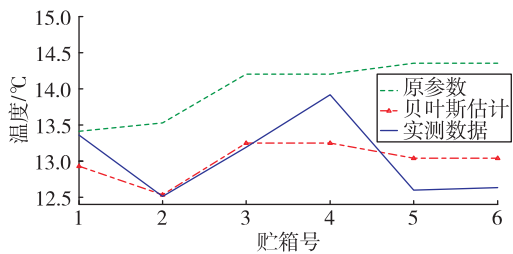


图 3 基于 B 试验任务数据的加注温度对比

Fig. 3 Comparison of filling temperature based on test B

进一步计算三种方法得到的加注结束温度与实测温度的误差,如表 2 所示。经过贝叶斯估计参数后得到的加注结束温度与实测温度最为吻合,相对经验参数的结果改善了 65.12%。相对于 A 样本数据,B 样本数据体现出来的实验测定结果误差更小,是因为本文中使用的 A 任务给定的经验参数,其本身就是针对 B 样本中拟合不好的问题进行修正过的结果,所以采用此参数计算 A 任务数据效果要优于 B 任务数据。同时,可以看到,直接根据靶场小样本数据进行贝叶斯回归修正后的参数,其拟合结果在 A、B 数据中皆优于经验参数的拟合结果。

表 2 基于 B 样本数据的误差对比			
Tab. 2 Comparison of error based on B test			
参数	贝叶斯	最小二乘	经验参数
最大相对误差/℃	0.671 0	0.937 5	1.753 1
最小相对误差/℃	0.021 7	0.056 1	0.138 1
均方误差	0.998 3	1.803 8	2.861 8

上述结果说明利用历史数据进行贝叶斯回归得到的参数与实验测定参数相比,能更好地拟合加注过程的煤油温升。据此验证了贝叶斯回归进行参数估计,改进未来煤油加注温度计算这一方法的可行性和科学性。

值得注意的是,贝叶斯回归不仅在小样本情况下实现科学合理的参数估计,它同样可以在样本量增加的情况下,提高自身的估计精度。图 4 所示为使用 A、B 两次样本数据进行估计的参数,与只使用 A 一次样本数据进行估计的参数,对 A 加注结束温度进行拟合解算的效果对比。

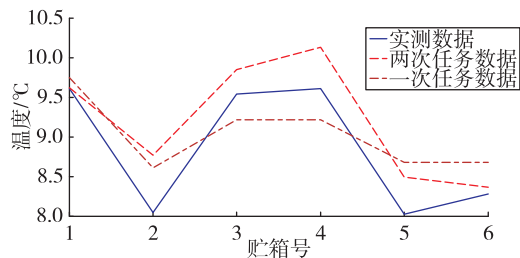


图 4 样本数量对参数估计效果的影响

Fig. 4 The influence of sample size to estimation result

使用两次数据样本估计的参数,解算出的加注

结束温度与实际测量温度的均方误差为 4.056 6,与一次数据样本估计的参数得到的均方误差 5.937 5 (见表 1)相比,有了进一步改善。

4 结语

为适应未来火箭飞行试验更大推力、更高精度的要求^[15],精准加注是靶场必须解决的技术问题。在最快的时间内估计出最精确的参数,建立最精确的推进剂温升模型,是其中的关键环节。利用仅有的几次飞行试验数据,本文采用贝叶斯回归分析方法,很好地解决了靶场小样本下煤油加注温升参数估计问题。相比于目前使用的经验参数和经典的最小二乘法,贝叶斯回归能够综合经验参数先验信息和靶场实地实测数据进行科学估计,有效抑制测量误差的影响,显著提高估计精度。随着液体火箭飞行试验任务的逐渐增多,可用的数据样本容量相应增大,贝叶斯回归分析的参数估计精度会得到进一步提升,为精准加注提供更为坚实的理论基础。

参考文献:

- [1] 杨寒,吴志坚.变频泵在地面煤油加注系统中的应用[J].火箭推进,2015,41(5):111-114.
YANG H, WU Z J. Application of variable frequency pump in kerosene filling system on ground[J]. Journal of Rocket Propulsion, 2015, 41(5):111-114.
- [2] 苏永芝,李俊.常规加注虚拟仿真系统应用分析[J].北京信息科技大学学报(自然科学版),2017,32(3):75-79.
- [3] 马原,王磊,孙培杰,等.微重力环境低温流体无排气加注过程数值研究[J].低温工程,2017(4):7-13, 20.
- [4] 王正明,易东云.测量数据建模与参数估计[M].长沙:国防科技大学出版社,1996.
- [5] 何晓群,刘义卿.应用回归分析[M].北京:中国人民大学出版社,2001.
- [6] 朱蕾,杨毅.改进贝叶斯算法在配网故障诊断中的研究[J].三峡大学学报(自然科学版),2018,40(2):72-77.
- [7] 谢仕伟,胡志坚,吴方劼,等.基于递推最小二乘法的多端口外网静态等值参数辨识方法[J].电力系统保护与控制,2018,46(3):26-34.
- [8] 曹宁,王晓锋,徐亚栋,等.基于逐步回归法的车载炮射击精度影响因素分析[J].南京理工大学学报,2013,37(4):557-560.
- [9] 徐群.非线性回归分析的方法研究[D].合肥:合肥工业大学,2009.
- [10] PENG X Y, YAN Z Z. Bayesian estimation for generalized exponential distribution based on progressive type-I interval censoring[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 2013, 29(2):391-402.
- [11] LIN Y J, LIO Y L. Bayesian inference under progressive type-I interval censoring[J]. Journal of Applied Statistics, 2012, 39(8):1811-1824.
- [12] 韦来生,张伟平.贝叶斯分析[M].合肥:中国科学技术大学出版社,2013.
- [13] 徐芹.正态线性回归模型下 Bayes 估计的优良性[J].重庆工商大学学报(自然科学版),2008,25(4):347-349, 402.
- [14] 田博,陈舜杰,周雯.基于最小风险贝叶斯决策理论的在线评价排名方法研究[J].上海管理科学,2018,40(2):91-95.
- [15] 赵颖.国外新型运载火箭研制计划与发展现状[J].国际太空,2002(10):22-27.

(编辑:马 杰)