

# 随机振动疲劳试验的小裂纹扩展分析方法

张允涛, 宋少伟, 王 珺

(液体火箭发动机技术重点实验室, 陕西 西安 710100)

**摘 要:**针对某型液体火箭发动机管路接头的随机振动疲劳试验, 基于断裂力学的小裂纹理论进行了裂纹扩展寿命分析。分别从小裂纹应力强度因子计算、疲劳应变/应力谱、裂纹扩展速率曲线以及裂纹扩展计算程序等方面进行了研究。使用 FRANC3D(试用版)进行三维裂纹的有限元计算, 得到了管路结构表面裂纹的应力强度因子变化规律; 对应变实测数据进行了雨流计数, 获得了用于裂纹扩展计算的应力循环谱块, 研究了疲劳试验的应变循环峰值、幅值等时域分布特征; 采用 Newman 闭合理论对长裂纹的 NASGRO 裂纹扩展速率曲线进行修正, 给出了试验件材料的相关参数; 最后, 使用一种疲劳应力谱块平均施加方法进行了裂纹扩展寿命的快速计算。通过与试验结果对比, 验证了计算方法有效、可靠。

**关键词:**随机振动疲劳; 小裂纹; 疲劳应力谱; 裂纹扩展速率曲线; 裂纹扩展计算

**中图分类号:**V434.3      **文献标识码:**A      **文章编号:**1672-9374(2021)02-0068-08

## Study on analysis method of small crack growth in random vibration fatigue test

ZHANG Yuntao, SONG Shaowei, WANG Jun

(Science and Technology on Liquid Rocket Engine Laboratory, Xi'an 710100, China)

**Abstract:** According to the random vibration fatigue test of the pipeline joint in a liquid rocket engine, the crack propagation analysis was carried out based on the small fatigue crack theory of fracture mechanics. The calculation of small crack stress intensity factor, fatigue strain/stress spectrum, crack growth rate curve and crack growth calculation program were studied, respectively. FRANC3D (trial version) was used to perform the finite element calculation of three-dimensional crack, and the variation law of stress intensity factor on the surface crack of pipeline structure was obtained. Rain-flow cycle counting method was used to count the measured strain data, and the stress cycle spectrum block for crack growth calculation was formed. Then, time-domain distribution characteristics of the cyclic strain peak and amplitude in fatigue test were studied. Newman crack closure theory was used to modify the NASGRO crack growth rate curve of long cracks, and the relevant parameters of the test sample material were given. Finally, an average loading method of fatigue stress spectrum block was used to quickly calculate the crack growth life. Compared with the experimental results, the calculation method is effective and reliable.

收稿日期:2019-12-12;修回日期:2020-03-13

基金项目:国家级重点实验室基金项目(HTKJ2020KL011006)

作者简介:张允涛(1985—),男,硕士,高级工程师,研究领域为液体火箭发动机力学环境试验。

**Keywords:** random vibration fatigue; small crack; fatigue stress spectrum; crack growth rate curve; crack growth calculation

## 0 引言

振动环境下的疲劳失效是液体火箭发动机推进剂管路等结构的一种典型失效模式<sup>[1-3]</sup>,其主要特征是共振疲劳及累积疲劳损伤<sup>[4-6]</sup>。目前,工程领域处理振动疲劳问题以疲劳分析方法为主<sup>[7-9]</sup>,鲜有采用断裂力学方法进行分析的完整范例。基于断裂力学的裂纹扩展分析方法是结构疲劳耐久性分析的另一种途径,在飞机结构的寿命评估和损伤评定方面取得了显著成效<sup>[10-11]</sup>,为液体火箭发动机管路等结构的振动疲劳分析提供了很好的借鉴。

工程结构的裂纹扩展分析以线弹性断裂力学应用最为广泛,该方法以裂纹顶端的应力强度因子(stress intensity factor, SIF)  $K$  为主要表征参量,适用于小范围屈服条件下的宏观长裂纹问题。根据实验室经验,液体火箭发动机管路等结构的振动疲劳总寿命受裂纹萌生阶段的小裂纹(也称为短裂纹)主导。小裂纹通常指长度小于 1~2 mm 的裂纹,众多研究表明<sup>[12-13]</sup>,裂纹长度在 10  $\mu\text{m}$ ~1 mm 的小裂纹阶段的扩展行为与同种材料的长裂纹扩展行为存在明显的差异。在相同的名义应力强度因子范围  $\Delta K$  的作用下,小裂纹的扩展速率高于长裂纹,并且在低于长裂纹扩展门槛值  $\Delta K_{th}$  的情况下小裂纹仍能扩展,即所谓的“小裂纹效应”。因此,使用长裂纹试验得出的裂纹扩展数据对小裂纹阶段的寿命作预测会导致偏危险的结果。Newman 和吴学仁等的研究发现,裂纹闭合现象是导致长裂纹与小裂纹扩展行为差异的主要原因<sup>[14-16]</sup>。采用 Newman 塑性致闭模型,通过考虑裂纹尖端后方尾迹区的残留塑性变形,并引入裂纹尖端前缘的三维约束效应,用等效应力强度因子  $\Delta K_{eff}$  对长裂纹  $da/dN - \Delta K$  进行修正后可拓展应用到自然萌生的小裂纹扩展阶段。

本文对某型液体火箭发动机管路接头模拟件的随机振动疲劳试验进行研究,基于小裂纹理论进行了疲劳裂纹扩展分析,开展了小裂纹三维有限元应力强度因子计算、疲劳应力谱、裂纹扩展速率曲线修正以及裂纹扩展计算程序等内容研究,初步形

成了随机振动疲劳的小裂纹扩展分析方法和流程。

## 1 试验简介

某型发动机降温器燃料出口管路接头随机振动疲劳试验的试验件形式如图 1 和图 2 所示,考核部位在管路外壁  $R$  区,倒角半径 15 mm,倒角前后管路壁厚分别为 1.25 mm 和 1.75 mm,管路材料为 1Cr18Ni9Ti,试验件一阶固有频率约 375 Hz,随机振动试验的频率范围 320~430 Hz,激励谱型为白谱,控制响应谱的 RMS(均方根值)见表 1。试验件底部与连接底板焊接而成,底板通过螺栓与振动台固定连接。试验时,在  $R$  区附近沿轴向粘贴了应变片,并在试验件顶部布置加速度传感器。根据加速度传感器的响应确定随机振动输入量级,试验中监测传感器的响应变化,当加速度 RMS 出现明显下降时,停止试验。试验结束后,在  $R$  区进行着色,通过目视检查可观察到沿管路周向扩展的裂纹,如图 3 所示。表 1 给出了本次试验的主要结果。

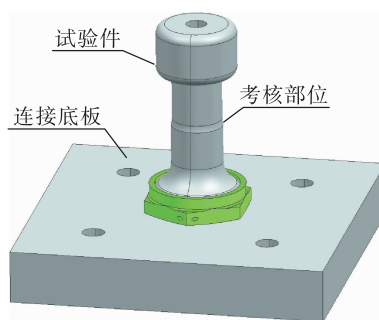


图 1 试验件结构形式

Fig. 1 Geometric structure of test specimen

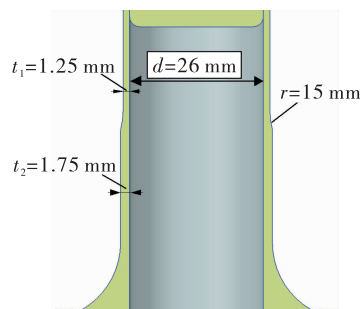


图 2 疲劳试验考核部位

Fig. 2 Assessment site in fatigue test

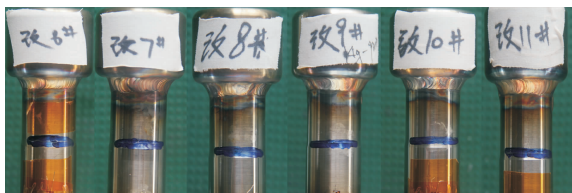


图 3 试验件典型开裂模式  
Fig. 3 Typical cracking mode of test specimen

表 1 试验结果  
Tab. 1 Test results

| 试验件<br>编号 | 控制响应<br>RMS/g | 应变响应<br>RMS/ $\mu\epsilon$ | 试验<br>时间/s | 裂纹<br>长度/mm |
|-----------|---------------|----------------------------|------------|-------------|
| 6         | 20.38         | 1 695                      | 94         | 30.0        |
| 7         | 17.04         | 1 407                      | 427        | 29.1        |
| 8         | 14.98         | 1 106                      | 762        | 29.0        |
| 9         | 14.10         | 1 155                      | 598        | 27.3        |
| 10        | 14.16         | 932                        | 1 202      | 29.8        |
| 11        | 13.07         | 756                        | 2 206      | 31.0        |

2 裂纹扩展分析

2.1 应力强度因子

小裂纹扩展分析的首要条件是高精度的应力强度因子求解。应力强度因子

$$K = \beta \sigma \sqrt{\pi a} \tag{1}$$

式中： $\beta$ 为无量纲因子，与结构形式、载荷类型以及裂纹的几何形状有关； $\sigma$ 为远场应力，文中根据试验测量结果得到，详见下节； $a$ 为裂纹长度。

小裂纹沿深度和长度方向均处于明显的三维应力状态，需要进行三维应力强度因子求解。采用常规的有限元方法计算时，裂纹尖端的网格细化程度要求很高，单元尺寸从结构整体网格向裂纹尖端局部网格过渡时变化剧烈，为了保证计算精度，划分网格时需要剖切细化区域或者减小整体网格尺寸大小，网格划分难度较大。本文使用 FRANC3D 三维断裂力学分析软件(试用版)进行应力强度因子计算，该软件可以模拟任意类型的裂纹和载荷形式，采用了 M 积分<sup>[17]</sup>等高精度后处理计算方法，适用于小裂纹的应力强度因子计算。FRANC3D 采用

整体模型与局部模型结合的方法划分单元网格，能够有效控制整体网格大小，使裂尖局部网格尺寸满足计算精度要求。

根据试验结果，假设裂纹萌生于  $R$  区与管路外表面相切处，初始裂纹形式为半圆形表面裂纹，裂纹长度  $a$  和深度  $c$  均为 0.01 mm。为简化计算，假设裂纹扩展长度和深度方向尺寸比值  $a/c = 1$  保持不变。裂纹几何模型如图 4 所示，图 4 中  $\varphi$  为给定裂纹长度和深度时裂纹面上第  $i$  个计算点到管路外表面的角度， $\theta$  为裂纹面总的展开角度。裂纹穿透管路壁厚以后变为穿透型裂纹。图 5 给出了裂纹长度为 1 mm 时的有限元模型，在裂纹扩展区域有限元网格明显细化，裂纹面为半圆形，裂纹前缘划分了 51 个计算点，假定远场名义应力为 100 MPa 进行计算，得到了裂纹前缘各计算点的应力强度因子随裂纹长度  $a$  的变化结果，如图 6 所示。可以看出，靠近管壁表面的应力强度因子比管壁内部的应力强度因子要大，同时，随着裂纹长度的增加，裂纹越深，应力强度因子沿前缘各点的这种规律越明显。

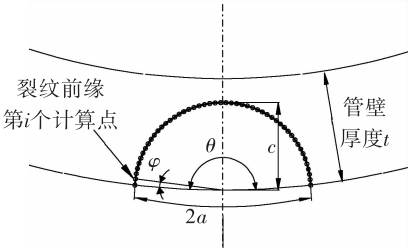


图 4 裂纹几何模型  
Fig. 4 Geometric model of crack

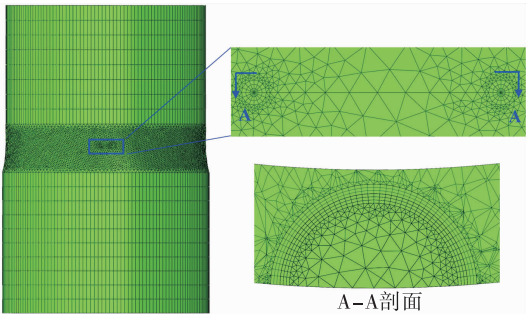


图 5 有限元模型  
Fig. 5 Finite element model

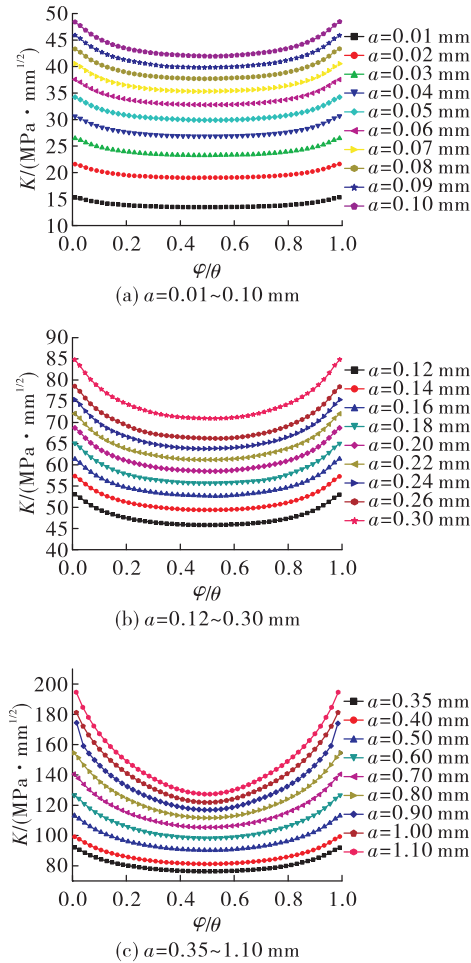


图6 表面裂纹前缘的应力强度因子

Fig. 6 Stress intensity factor at the front edge of surface crack

试验中各试件的裂纹扩展最终长度约 30 mm, 因此, 给定裂纹扩展范围从 0.01 mm 到 15 mm 计算应力强度因子。图 7 给出了裂纹面最外层计算点 ( $\phi = 0$ ) 的应力强度因子随裂纹长度  $a$  的变化曲线, 该点的应力强度因子参与最终计算。

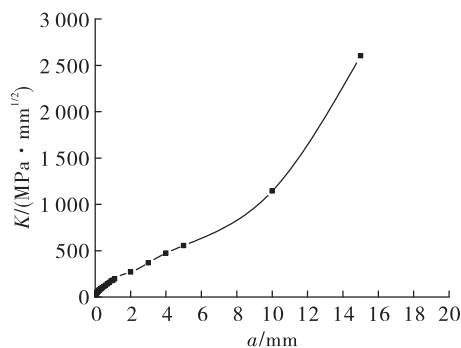


图7 应力强度因子随裂纹长度的变化曲线

Fig. 7 Stress intensity factor with crack length

试验应力强度因子的具体实现过程是将有限元计算的应力强度因子  $K$  和计算中施加的远场名义应力  $\sigma$  代入式(1), 得到各裂纹长度下的无量纲因子  $\beta$ , 该无量纲因子与试验测量的循环应力再次代入式(1)得到试验应力强度因子。

## 2.2 疲劳应力谱

试验应力强度因子计算的另一关键环节是疲劳应力谱, 也就是应力循环的确定。选取试验的实测应变数据, 对时域应变数据进行雨流计数 (rain-flow cycle counting method) 得到疲劳应变循环, 将应变循环转换为应力循环后进行应力强度因子和裂纹扩展寿命计算。本试验的应变采样频率为 4 096 Hz, 对每个试验件, 截取 10 s 的采样数据作为原始应变谱, 共 40 960 个数据点, 雨流后得到应变循环形成一个载荷谱块。假设考核部位的场应力为单向应力状态, 忽略剪应力的影响, 则考核部位应力

$$\sigma = E\varepsilon$$

式中:  $E$  为材料弹性模量;  $\varepsilon$  为实测轴向应变, 即得到疲劳应力谱块。

图 8 给出了疲劳应变循环均值  $\varepsilon_{\text{mean}} = (\varepsilon_{\text{max}} + \varepsilon_{\text{min}})/2$  及幅值  $\varepsilon_a = (\varepsilon_{\text{max}} - \varepsilon_{\text{min}})/2$  的分布图, 色谱代表出现次数。整体来看, 各试件的疲劳应变循环集中在零均值附近, 非对称循环的出现次数较少。图 9 和图 10 分别给出了各级疲劳应变循环的峰值和幅值的发生频次, 可看作应变峰值和幅值的概率密度, 由图可见, 对于本试验的窄带随机激励, 应变循环的峰值呈现为倒钟形的正态分布, 而应变循环的幅值则近似服从瑞利分布。疲劳损伤主要取决于疲劳循环载荷的幅值, 结构在随机激励下的应力或应变响应的幅值概率分布必然与外激励、结构动特性等有关, 因此, 不能简单地假设某一种概率分布作为结构随机振动疲劳分析的通用模型。

试验中各试件疲劳试验时间 (即疲劳裂纹扩展寿命) 相对于 10 s 采样数据足够长, 且认为 10 s 采样数据能够较充分地描述整个裂纹扩展寿命内的疲劳应力的随机特征, 因此, 本文将 10 s 采样数据经雨流后的疲劳应力循环作为一个平均谱块施加在整个裂纹扩展范围内进行计算, 不再考虑谱块内各级应力循环的先后次序对裂纹扩展寿命的影响。



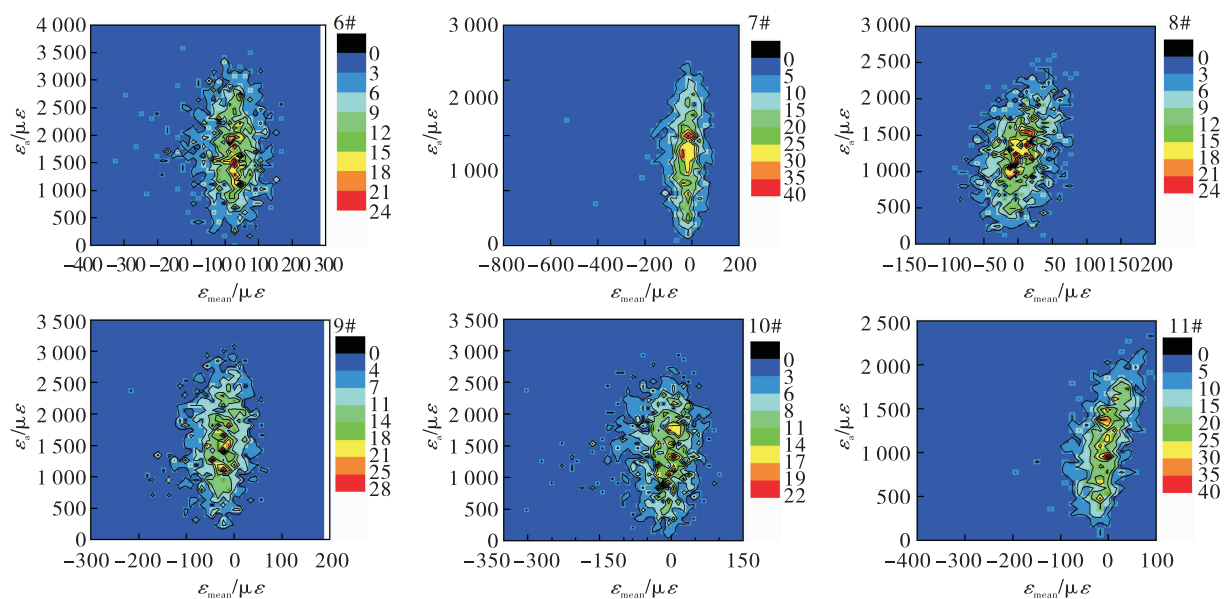


图 8 应变循环均值与幅值分布图

Fig. 8 Mean value and amplitude distribution of strain cycle

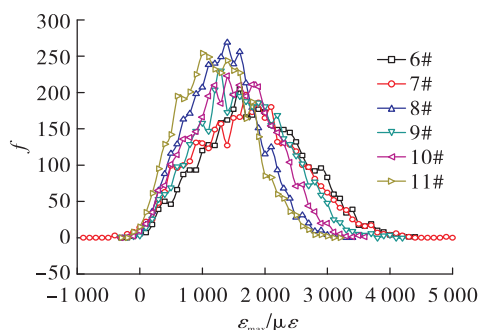


图 9 应变循环峰值发生频次

Fig. 9 Occurrence number of strain cycle peak

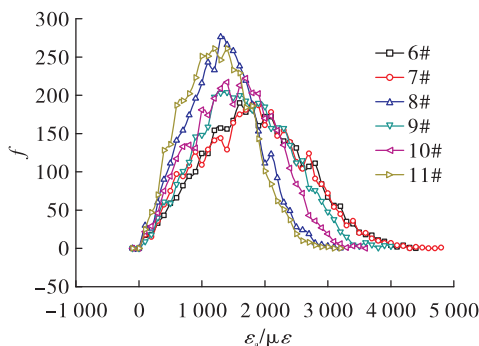


图 10 应变循环幅值发生频次

Fig. 10 Occurrence number of strain cycle amplitude

### 2.3 $da/dN - \Delta K$ 裂纹扩展速率曲线

使用应力强度因子进行小裂纹扩展寿命计算时,必须选择合适的裂纹扩展速率曲线,并对裂纹扩展速率曲线进行参数修正以适用于小裂纹扩展计算。金属材料裂纹扩展速率曲线  $da/dN - \Delta K$  的典型形式如图 11 所示<sup>[18]</sup>,通常将曲线划分为 3 个区域:近门槛区、稳态扩展区和失稳扩展区。在长裂纹扩展的近门槛值区,小裂纹的扩展速率会比长裂纹的相应速率高很多,因此,使用长裂纹  $da/dN - \Delta K$  进行小裂纹裂纹扩展分析时,必须对近门槛值扩展曲线进行修正,以避免非保守的计算结果。本文采用 NASGRO 裂纹扩展速率公式进行计算,其表达式为<sup>[19]</sup>

$$\frac{da}{dN} = C \left[ \left( \frac{1-f}{1-R} \right) \Delta K \right]^n \frac{\left( 1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K} \right)^p}{\left( 1 - \frac{K_{max}}{K_c} \right)^q} \quad (2)$$

式中:  $C, n, p, q$  为材料常数;  $f$  为裂纹张开函数;  $R$  为应力比;  $\Delta K = K_{max} - K_{min}$  为应力强度因子变程;  $\Delta K_{th}$  为应力强度因子门槛值;  $K_c$  为材料断裂韧度。  $f$  函数由 Newman 裂纹闭合理论给出,具体公式见文献<sup>[18]</sup>。

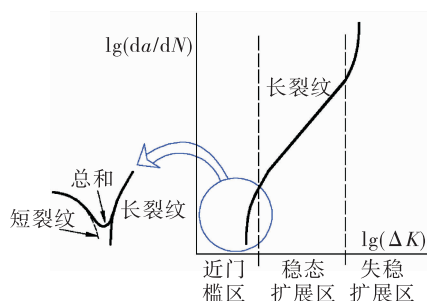


图 11 小裂纹及长裂纹扩展行为

Fig. 11 Growth behavior of small crack and long crack

对疲劳小裂纹,在 NASGRO 裂纹扩展速率公式中通过修正应力强度因子门槛值  $\Delta K_{th}$  予以考虑。对不同的应力比,  $\Delta K_{th}$  的表达式为

$$\Delta K_{th} = \Delta K_1^* \left[ \frac{1-R}{1-f[R]} \right]^{(1+RC_{th}^p)} / (1-A_0)^{(1-R)C_{th}^p}, R \geq 0 \quad (3)$$

$$\Delta K_{th} = \Delta K_1^* \left[ \frac{1-R}{1-f[R]} \right]^{(1+RC_{th}^p)} / (1-A_0)^{(C_{th}^p - RC_{th}^p)}, R < 0 \quad (4)$$

其中

$$K_1^* = \Delta K_1 \left[ \frac{a}{a + a_0} \right]^{1/2}$$

式中:  $\Delta K_1$  为应力比  $R$  为 1.0 时的长裂纹应力强度因子门槛值;  $a$  为裂纹长度;  $a_0$  为小裂纹参数(典型值为 0.038 1 mm);  $A_0$  为裂纹张开参数;  $C_{th}^m$  和  $C_{th}^p$  为

裂纹扩展速率参数。

根据文献[20]数据,并通过参数修正,本文使用的材料裂纹扩展参数如表 2 所示。

表 2 NASGRO 裂纹扩展速率参数

Tab. 2 Parameters of NASGRO crack growth rate

| $\sigma_b$ /MPa         | $\sigma_s$ /MPa | $K_{IC}$              | $A_k$          |
|-------------------------|-----------------|-----------------------|----------------|
| 620.5                   | 248.2           | 8181                  | 0.75           |
| $C$                     | $n$             | $p$                   | $q$            |
| $4.843 \times 10^{-13}$ | 3.0             | 0.25                  | 0.25           |
| $B_k$                   | $a_0$ /mm       | $K_{th(s)}/K_{th(L)}$ | $S_{max}/Flow$ |
| 0.5                     | 0.038 1         | 0.2                   | 0.3            |
| $\Delta K_1$            | $C_{th}^p$      | $C_{th}^m$            | $\alpha$       |
| 63.94                   | 0.63            | 0.1                   | 2.5            |

## 2.4 裂纹扩展计算程序

从  $da/dN - \Delta K$  的表达式可见,裂纹扩展寿命计算是一个积分过程。实际计算中,将裂纹扩展增量设置为一个步长小量  $\Delta a$ ,在每个步长内计算裂纹扩展寿命  $\Delta N$ ,对从初始裂纹到临界裂纹的整个扩展长度内的  $\Delta N$  进行累加就得到总的裂纹扩展寿命,通常按循环接循环的方法进行计算。本文使用一种快速裂纹扩展计算方法,具体流程如图 12 所示,在 Excel 中输入计算公式即可实现。




|   |   |                       |     |   |                       |     |   |                       |      |
|---|---|-----------------------|-----|---|-----------------------|-----|---|-----------------------|------|
| 循环应力                                    |  |                       | ... |  |                       | ... |  |                       | 裂纹长度 |
| $[\sigma_{1,max} \quad \sigma_{1,min}]$ | $\frac{da}{dN_{1,0}}$   | $\frac{da}{dN_{1,1}}$ | ... | $\frac{da}{dN_{1,i-1}}$   | $\frac{da}{dN_{1,i}}$ | ... | $\frac{da}{dN_{1,n-1}}$   | $\frac{da}{dN_{1,n}}$ |      |
| $[\quad \dots \quad ]$                  | ...   |                       | ... | ...   |                       | ... | ...   |                       |      |
| $[\sigma_{j,max} \quad \sigma_{j,min}]$ | $\frac{da}{dN_{j,0}}$   | $\frac{da}{dN_{j,1}}$ | ... | $\frac{da}{dN_{j,i-1}}$   | $\frac{da}{dN_{j,i}}$ | ... | $\frac{da}{dN_{j,n-1}}$   | $\frac{da}{dN_{j,n}}$ |      |
| $[\quad \dots \quad ]$                  | ...   |                       | ... | ...   |                       | ... | ...   |                       |      |
| $[\sigma_{m,max} \quad \sigma_{m,min}]$ | $\frac{da}{dN_{m,0}}$   | $\frac{da}{dN_{m,1}}$ | ... | $\frac{da}{dN_{m,i-1}}$   | $\frac{da}{dN_{m,i}}$ | ... | $\frac{da}{dN_{m,n-1}}$   | $\frac{da}{dN_{m,n}}$ |      |
| $\sum_{j=1}^m \frac{da}{dN_{j,i}}$      | $\frac{da}{dN_0}$   | $\frac{da}{dN_1}$     | ... | $\frac{da}{dN_{i-1}}$   | $\frac{da}{dN_i}$     | ... | $\frac{da}{dN_{n-1}}$   | $\frac{da}{dN_n}$     |      |
| $N_i$                                   | $N_1 = \frac{a_1 - a_0}{(\frac{da}{dN_0} + \frac{da}{dN_1})/2}$                     |                       | ... | $N_i = \frac{a_i - a_{i-1}}{(\frac{da}{dN_i} + \frac{da}{dN_{i-1}})/2}$             |                       | ... | $N_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{(\frac{da}{dN_n} + \frac{da}{dN_{n-1}})/2}$               |                       |      |
|   | $N = \sum N_i$  |                       |     |   |                       |     |   |                       |      |

图 12 裂纹扩展计算流程

Fig. 12 Calculation process of crack growth

首先,将给定的裂纹扩展长度范围  $a_0$  到  $a_n$  分成  $n$  个区间,对每一个裂纹长度  $a_i$ ,依次计算应力谱块(共有  $m$  个循环应力)中第  $j$  个循环应力对应的裂纹扩展速率  $da/dN_{j,i}$ ,得到  $m \times n$  个裂纹扩展速率值;然后,将每一个裂纹长度下  $m$  个裂纹扩展速率相加,得到裂纹长度  $a_i$  对整个应力谱块的裂纹扩展速率  $da/dN_i$ ,并计算每一个裂纹扩展增量区间  $[a_{i-1}, a_i]$  对整个应力谱块的平均循环次数  $N_i$ ;最后,将  $a_0$  到  $a_n$  的  $n$  个裂纹扩展区间的平均循环次数相加,得到总的循环次数  $N$ ,即为最终总的裂纹扩展寿命。

本文计算中,一个应力谱块代表 10 s 时间,应力谱块共循环了  $N$  次,则裂纹扩展寿命按时间表示为  $10N$  s。

对本次试验 6 个有效断裂试验件按上述方法进行计算,裂纹扩展寿命结果见表 3,可以看出,试验件的应变响应(以 RMS 为表征)越大,裂纹扩展寿命越短,这与经典的 Miner 疲劳损伤累积理论是一致的,即结构承受的疲劳应力水平越高,其疲劳损伤越严重,因而寿命越短。不同的是在 Miner 方程中,寿命  $N$  直接根据损伤计算得到,而在裂纹扩展计算中,寿命  $N$  由裂纹循环扩展并累加得到。

表 3 裂纹扩展寿命计算结果

Tab. 3 Calculation results of crack growth

| 试验件编号 | 裂纹扩展寿命/s |       |
|-------|----------|-------|
|       | 试验       | 计算    |
| 6     | 94       | 113   |
| 7     | 427      | 314   |
| 8     | 762      | 612   |
| 9     | 598      | 556   |
| 10    | 1 202    | 1 116 |
| 11    | 2 206    | 2 171 |

图 13 给出了裂纹扩展长度随裂纹扩展寿命(时间)的变化曲线,显然,裂纹扩展寿命的绝大部分时间在小于 1 mm 的小裂纹扩展阶段,长裂纹阶段的稳定扩展寿命很短,因此,对该类管路结构进行疲劳和损伤容限设计时,重点考虑使用疲劳极限强度较高、裂纹扩展速率较低的材料,使结构在小裂纹阶段有足够长的缓慢扩展寿命,从而保证结构在随机振动环境下的疲劳强度更好地满足设计使用要求。

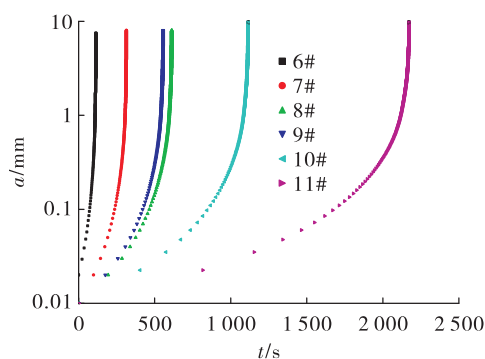


图 13 裂纹扩展长度随时间的变化

Fig. 13 Crack growth length with time

### 3 结论

通过对某型发动机管路接头的随机振动疲劳试验开展基于小裂纹的裂纹扩展分析,主要结论如下:

- 1) 采用 FRANC3D(试用版)可实现小裂纹的有限元网格划分和三维应力强度因子的精确计算。
- 2) 使用 NASGRO 裂纹扩展公式计算寿命时,通过对长裂纹的  $da/dN - \Delta K$  曲线的门槛值进行修正,可用于小裂纹的裂纹扩展分析。
- 3) 本试验窄带随机激励下的应变和应力响应视为零均值过程,疲劳应变循环的雨流峰值和雨流幅值分别近似服从正态分布和瑞利分布。
- 4) 使用一种疲劳应力谱块平均施加方法进行裂纹扩展寿命的快速计算,计算结果与试验值吻合较好。本文方法可作为液体火箭发动机管路等结构振动疲劳分析的工程参考。

#### 参考文献:

- [1] 张炜,田干,徐志高,等. 液体导弹发动机故障特性分析及诊断[M]. 北京:国防工业出版社,2014.
  - [2] 谭松林,李宝盛. 液体火箭发动机可靠性[M]. 北京:中国宇航出版社,2014.
  - [3] 杜大华,穆朋刚,田川,等. 液体火箭发动机管路断裂失效分析及动力优化[J]. 火箭推进,2018,44(3): 16-22.
- DU D H, MU P G, TIAN C, et al. Failure analysis and dynamics optimization of pipeline for liquid rocket engine [J]. Journal of Rocket Propulsion, 2018,44(3): 16-22.

- [4] 姚起杭,姚军.工程结构的振动疲劳问题[J].应用力学学报,2006,23(1):12-15.
- [5] 董保童,施荣明,朱广荣.随机振动载荷作用下的结构疲劳寿命估算[J].飞机设计,2001,21(3):36-41.
- [6] 王明珠.结构振动疲劳寿命分析方法研究[D].南京:南京航空航天大学,2009.
- [7] DIRLIK T. Application of computers in fatigue analysis [D]. UK: University of Warwick,1985.
- [8] 刘龙涛,李传日,程祺,等.某结构件的随机振动疲劳分析[J].振动与冲击,2013,32(21):97-101.
- [9] 智东平.航天结构振动疲劳寿命估计方法研究[D].南京:南京航空航天大学,2018.
- [10] 航空航天工业部科学技术研究院.美国空军损伤容限设计手册[M].西安:西北工业大学出版社,1995.
- [11] 斯而健.耐久性与损伤容限设计技术[J].民用飞机设计与研究,2003(2):1-9.
- [12] 丁传富,吴学仁.疲劳小裂纹的断裂力学参数及试验方法的研究进展[J].航空学报,1996,17(6):640-647.
- [13] 郭隽,郭成璧.疲劳短裂纹评定方法新进展[J].机械强度,2001,23(1):38-42.
- [14] NEWMAN J C, WU X R, SWAIN M H, et al. Small crack growth and fatigue life predictions for high-strength aluminium alloys: part i: experimental and fracture mechanics analysis[J]. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 1998, 21(11): 1289-1306.
- [15] 陈勃,吴学仁,刘建中.基于小裂纹扩展的耐久性分析和经济寿命预测方法[J].机械强度,2004,26(S1):246-249.
- [16] 吴学仁,刘建中.基于小裂纹理论的航空材料疲劳全寿命预测[J].航空学报,2006,27(2):219-226.
- [17] 王德法,高小云,师俊平.三维固体问题中M积分与总势能变化关系的研究[J].水利与建筑工程学报,2009,7(1):36-38.
- [18] SURESH S. 材料的疲劳[M].王中光,译.北京:国防工业出版社,1993.
- [19] 陆勇俊,张欢庆,王峰会,等.扩展有限元法在结构件疲劳寿命估算中的应用[J].应用力学学报,2016,33(3):441-446.
- [20] 刘颖,张海艳,赵海涛,等.航空用不锈钢焊接导管的损伤容限研究[J].航空制造技术,2012,55(13):94-97.